الأضواء

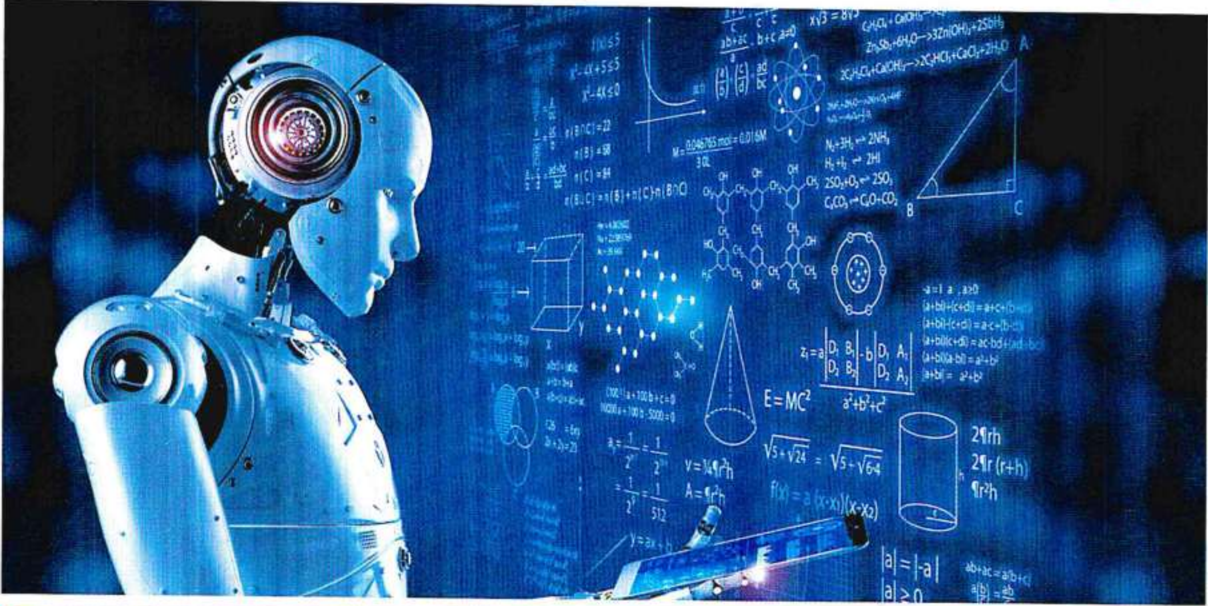
الصف الثانى الإعدادى 2
الفصل الدراسى الثانى



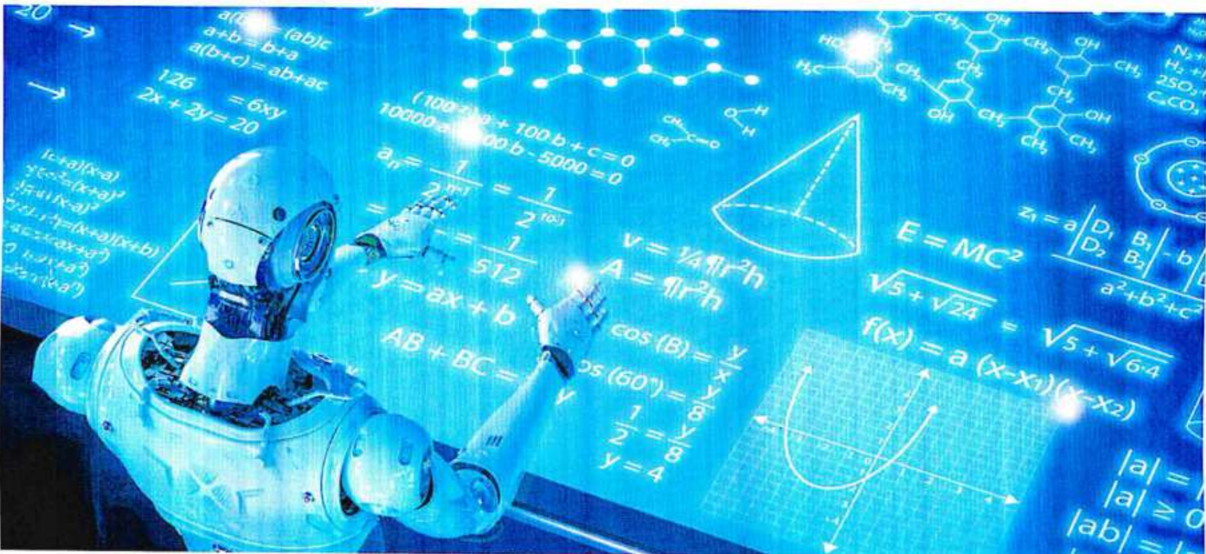
الرياضيات
2026

المحتويات

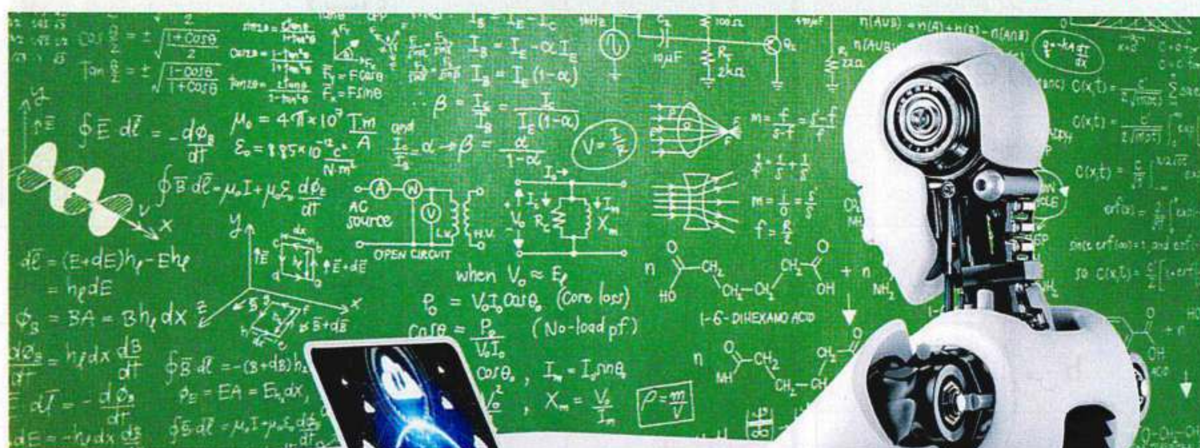
الوحدة الأولى: الأعداد والعمليات عليها



الوحدة الثــانيـة: الجبر



الوحـدة الثالثة: الهندسة



الوحـدة الرابعة: الإحصـاء والاحتمال

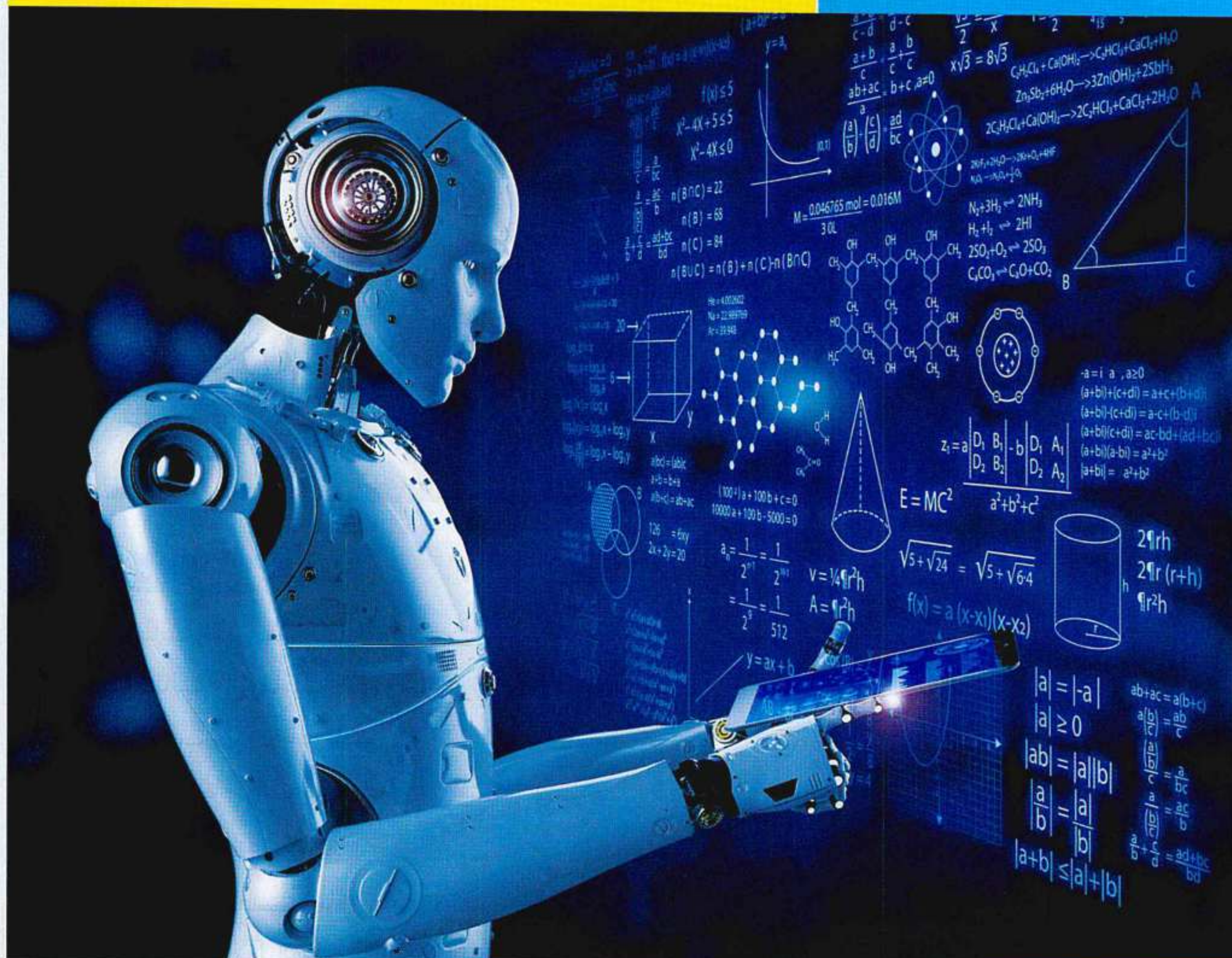


رموز وأساسيات رياضية

Q	مجموعة الأعداد النسبية	∞	ما لا نهاية
$\grave{Q}$	مجموعة الأعداد غير النسبية	$-\infty$	سالب ما لا نهاية
R	مجموعة الأعداد الحقيقية	$X \cup Y$	X اتحاد Y
$\sqrt{\ }$	الجــذر التربيعـى الموجب	$X \cap Y$	X تقاطع Y
$\sqrt[3]{\ }$	الجــذر التكعيبى	$X - Y$	X فرق Y
$\approx$	يساوى تقـريبـًا	$X \times Y$	حاصل الضرب الديكارتى X ضرب Y
$\neq$	لايساوى	$x \, R \, y$	$(x , y) \in R$
$\in$	ينتمـى	$f : X \longrightarrow Y$	f دالة من X إلى Y
$\vert a \vert$	القيمة المطلقة للعدد a	$n(X)$	عدد عناصر المجموعة X
{ } أو $\varnothing$	فاى (المجموعة الخالية)	$a < b$	a أقل من b
π	النسبة التقريبية $\pi \approx 3.14159254$	$a > b$	a أكبر من b
$a : b$ a إلى b أو $\frac{a}{b}$	النسبة بين a ، b a مقدم النسبة ، b تالى النسبة	//	يوازى
(a , b)	زوج مرتب a المسقط الأول، b لمسقط الثانى	$\perp$	عمودى على
[a , b]	فترة مغلقة	r	طول نصف قطر الدائرة
]a , b[	فترة مفتوحة	m	ميل الخط المستقيم
]a , b]	فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	L . A	المساحة الجانبية
[a , b[	فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة	S . A	المساحة الكلية أو السطحية
P (A)	احتمال وقوع الحدث A	V	الحجم

الوحدة الأولى 1

الأعداد والعمليات عليها



دروس الوحـــدة

الـــدرس الأول: خواص التناسب (Properties of Proportion)

الجزء 1 خاصية (1)، خاصية (2)

الجزء 2 خاصية (3)

الـدرس الثانى: التناسب المتسلسل (Continued Proportion)

يُعد مفهوما «التناسب»، و«التناسب المتسلسل» من الأسس الرياضية التى تقوم على دراسة العلاقات النسبية بين الكميات، والتى تظهر بوضوح فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى، إذ تعتمد النماذج الذكية على تحليل العلاقات المتناسبة بين البيانات، مما يساعدنا على التعلم بدقة وكفاءة.

- **فهل يمكن تطوير مفهومى «التناسب» و«التناسب المتسلسل فى تفعيل تطبيقات الذكاء الأصطناعى؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

- التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
- التفكير الإبداعى.

القيم:

- التذوق الفنى.
- احترام الآخر.
- الوعى البيئى.

ذاكر الدرس 1

خواص التناسب (Properties of Proportion) الجزء 1







نواتج التعلم

- يتذكر الطالب مفهوم التناسب.
- يتعرف الطالب على مفاهيم الأول والثانى والثالث والرابع المتناسب.
- يتعرف الطالب على خواص التناسب.
- يستخدم الطالب خواص التناسب فى حل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- التناسب (**Proportion**)
- الأول المتناسب (**First Proportional**)
- الثانى المتناسب (**Second Proportional**)
- الثالث المتناسب (**Third Proportional**)
- الرابع المتناسب (**Fourth Proportional**)
- الطرفان (**Extremes**)
- الوسطان (**Means**)
- الضرب التبادلى (**Cross Multiplication**)



فكر وناقش

- فى الشكل المقابل:

المستطيل ABCD هو تكبير للمستطيل XYZL بمقياس رسم معلوم.

هل يمكنك حساب محيط المستطيل XYZL ؟

A 20 سم B
X Y
10 سم 5 سم
L Z
D C

- فى هذا الدرس، سوف تتذكر مفهوم التناسب وتتعرف على خواص التناسب، والتى ستمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم التناسب وخواصه

- سبـق أن درست **النسبـة**، وهى المقارنة بالقسمة بين كميتين من نفس النوع ونفس الوحدة.

ويمكن التعبير عن النسبة بين الكمية a والكمية b بإحـدى الطـرق:

(a إلى b أو a : b أو $\frac{a}{b}$) والصيغ الثلاث تعبِّر عن نفس النسبة، ويسمى a مقدم النسبة، ويسمى b تالى النسبة.

- وسبق لك أيضًا دراسة مفهوم «التناسب»، وهو تساوى نسبتين أو أكثر.

◂ يقال إن الكميات a , b , c , d متناسبة إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

◂ وإذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإنه يقال إن الكميات a , b , c , d متناسبة.

- يُسمى a بالأول المتناسب.
- يُسمى b بالثانى المتناسب.
- يُسمى c بالثالث المتناسب.
- يُسمى d بالرابع المتناسب.
- يُسمَّى الحدان a, d بالطرفيـن، ويُسمَّى الحدان b, c بالوسطيـن.

فمثلًا: ◂ إذا كانت الأعداد: 18 , 12 , 6 , 4 متناسبـة

فإن: $\frac{4}{6}=\frac{12}{18}$

◂ إذا كان: $\frac{5}{10}=\frac{15}{30}$

فإن الأعداد: 30 , 15 , 10 , 5 متناسبـة

نقاط هامة

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن: ▸ $a\times d = b\times c$

أى أن: **حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين** (خاصية الضرب التبادلى)

- إذا كان: $a \times d = b \times c$ فإن: ▸ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- **فمثلًا:** إذا كان: $4\,b = 3\,a$ فإن: ▸ $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$

مثـال 1

1 أوجد الثالث المتناسب للكميات: 35 , 28 , 12

2 إذا كانت: 21 , 7a , 9a , 48 كميات متناسبة فأوجد قيمة a

الحـل

1 نفرض أن الثالث المتناسب هو x

∴ 35 , x , 28 , 12 متناسبـة

$\therefore\ \frac{12}{28}=\frac{x}{35}$

$\therefore\ 28\times x = 12\times 35$ (الضرب التبادلى)

$\therefore\ x = \frac{12\times 35}{28} = 15$

∴ الثالث المتناسب هو: 15

2 ∵ الكميات 21 , 7a , 9a , 48 متناسبـة

$\therefore\ \frac{21}{7a}=\frac{9a}{48}$

$\therefore\ \frac{3}{a}=\frac{3a}{16}$ (تبسيط النسب)

$\therefore\ a\times 3a = 3\times 16$ (الضرب التبادلى)

$\therefore\ 3a^2 = 48$

$\therefore\ a^2=\frac{48}{3}=16 \qquad \therefore\ a=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

سؤال 1

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(أ) إذا كان: $\frac{5}{15}=\frac{x}{3}$ فإن: $x =$ .... (5 ، 3 ، 2 ، 1)

(ب) إذا كان: $\frac{a}{4}=\frac{9}{a}$ فإن: a = ... (36 ، ±6 ، -9 ، 9)

2 أوجد الثانى المتناسب للكميات 12 , 8 , 6

3 إذا كانت الكميات 18 , 2a , a , 4 متناسبة ، فأوجد قيمة a

مثـال 2

1 أوجد العدد الذى إذا طرح مربعه من حدى النسبة $\frac{13}{15}$ أصبحت $\frac{2}{3}$

2 أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كلٍّ من الأعداد 3 , 5 , 9 , 13 تصبح أعدادًا متناسبـة.

الحـل

1 نفرض أن العدد هو x

∴ مربعه هو x^2

$\therefore \frac{13-x^2}{15-x^2}=\frac{2}{3}$ (بالضرب التبادلى)

$\therefore 30-2x^2=39-3x^2$

$\therefore 3x^2-2x^2=39-30$

$\therefore x^2=9$

$\therefore x=\pm 3$

∴ العـدد هو 3 أو -3

2 نفرض أن العدد هو x

∴ الأعداد $3+x$ ، $5+x$ ، $9+x$ ، $13+x$ متناسبة

$\therefore \frac{13+x}{9+x}=\frac{5+x}{3+x}$ (بالضرب التبادلى)

$\therefore (13+x)(3+x)=(9+x)(5+x)$

$39+16x+x^2=45+14x+x^2$

$\therefore 16x-14x=45-39$

$\therefore 2x=6 \qquad \therefore x=3$

∴ العـدد هو 3

مثـال 3



إذا كان: $\frac{2x+3}{2x-3}=\frac{2y+5}{2y-5}$ ، فأثبـت أن: $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$

الحـل

$\because \frac{2x+3}{2x-3}=\frac{2y+5}{2y-5}$

$\therefore (2x+3)(2y-5)=(2x-3)(2y+5)$ (الضرب التبادلى)

$\therefore 4xy-10x+6y-15=4xy+10x-6y-15$

$\therefore 6y+6y=10x+10x$

$\therefore 12y=20x \qquad \therefore \frac{x}{y}=\frac{12}{20} \qquad \therefore \frac{x}{y}=\frac{3}{5}$

س؟ سؤال 2

1 أوجد العدد الذى إذا أُضيف مربعه إلى حدى النسبة 7 : 11 فإنها تصبح 4 : 5

2 إذا كان: $\frac{3x+5}{3y+7}=\frac{x-5}{y-7}$ ، فأثبـت أن: $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$

3 اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(أ) إذا كان: $\frac{x+2y}{x-y}=\frac{2}{3}$ فإن: $\frac{y}{x}=$ .... $\left(\frac{1}{8} \text{ ، } 8 \text{ ، } -\frac{1}{8} \text{ ، } -8\right)$

(ب) إذا كان: $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{3}$ فإن: $\frac{x}{y}=$ .... $\left(4 \text{ ، } 2 \text{ ، } \frac{1}{4} \text{ ، } \frac{1}{2}\right)$

مثـال 4

إذا كان: $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$ ، فأثبـت أن الأعداد: a , b , c , d متناسبـة.

الحـل

$\because \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

$\therefore a(d-c) = c(b-a)$ (الضرب التبادلى)

$\therefore ad - \cancel{ac} = bc - \cancel{ac}$ $\therefore ad = bc$ $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore$ الأعـداد a , b , c , d متناسبـة

نقاط هامة

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر، ويُسمى (ثابت التناسب)

فباستخدام الضرب التبادلى يكون: ▸ $a = bk$, ▸ $c = dk$

- وبصفة عامـة إذا كان: ▸ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = k$

فإن: ▸ $a = bk$, ▸ $c = dk$, ▸ $e = fk$, ...

مثـال 5

إذا كان: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ، فأوجد قيمة: $\frac{3x-2y+z}{2x+3y-2z}$

الحـل

بفرض أن: ▸ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$, $(k \neq 0)$

$\therefore x = 2k$, $y = 3k$, $z = 4k$

$\therefore \frac{3x-2y+z}{2x+3y-2z} = \frac{3(2k)-2(3k)+4k}{2(2k)+3(3k)-2(4k)} = \frac{\cancel{6k}-\cancel{6k}+4k}{4k+9k-8k}$

$= \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$



سؤال 3

1 إذا كان: $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ، فأثبـت أن الأعداد a , b , c , d متناسبـة.

2 إذا كان: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ ، فأوجد قيمة: $\frac{2x-y+z}{3x+y-z}$

مثـال 6

إذا كانت: d , c , b , a كميات متناسبة، فأثبـت أن: $\frac{4b + 7d}{4a + 7c} = \frac{5b - 8d}{5a - 8c}$

الحـل

$\because$ d , c , b , a كميات متناسبـة

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad , \quad (k \neq 0)$

$\therefore a = bk \quad , \quad c = dk$

$\therefore \frac{4b + 7d}{4a + 7c} = \frac{4b + 7d}{4bk + 7dk} = \frac{(4b + 7d)}{k(4b + 7d)} = \frac{1}{k}$ .... (1)

$\therefore \frac{5b - 8d}{5a - 8c} = \frac{5b - 8d}{5bk - 8dk} = \frac{(5b - 8d)}{k(5b - 8d)} = \frac{1}{k}$ .... (2)

من (1) ، (2) نستنتـج أن: $\frac{4b + 7d}{4a + 7c} = \frac{5b - 8d}{5a - 8c}$

مثـال 7

إذا كانت: f , e , d , c , b , a كميات متناسبة، فأثبـت أن: $\frac{2a + 3c + e}{2b + 3d + f} = \frac{2a - 3e}{2b - 3f}$

الحـل

$\because$ f , e , d , c , b , a كميات متناسبـة

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \quad , \quad (k \neq 0)$

$\therefore a = bk \quad , \quad c = dk \quad , \quad e = fk$

$\therefore \frac{2a + 3c + e}{2b + 3d + f} = \frac{2bk + 3dk + fk}{2b + 3d + f} = \frac{k(2b + 3d + f)}{(2b + 3d + f)} = k$ .... (1)

$\therefore \frac{2a - 3e}{2b - 3f} = \frac{2bk - 3fk}{2b - 3f} = \frac{k(2b - 3f)}{(2b - 3f)} = k$ .... (2)

من (1) ، (2) نستنتـج أن: $\frac{2a + 3c + e}{2b + 3d + f} = \frac{2a - 3e}{2b - 3f}$

س؟ سؤال 4

1. إذا كانت: d , c , b , a أعدادًا متناسبة، فأثبـت أن: $\frac{a + c}{b + d} = \frac{3a + 4c}{3b + 4d}$
2. إذا كانت: d , c , b , a كميات متناسبة، فأثبـت أن: $\frac{ax - by}{cx - dy} = \frac{aL - bn}{cL - dn}$

خواص التناسب:

خاصيـة (1) إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (تساوى المعكوس)

خاصيـة (2) إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ (تبديل الطرفيـن)

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (تبديل الوسطيـن)

مثـال 8

إذا كان: $\frac{4}{a}=\frac{3}{b}=\frac{2}{c}$ ، فأثبت أن: $\frac{a+c}{c}\times\frac{b-c}{b}=1$

الحـل

$\because \frac{4}{a}=\frac{3}{b}=\frac{2}{c} \quad \therefore \frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=k\ ,\ (k\neq 0)$

$\therefore a=4k \quad , \quad b=3k \quad , \quad c=2k$

$\therefore \frac{a+c}{c}\times\frac{b-c}{b}=\frac{4k+2k}{2k}\times\frac{3k-2k}{3k}$

$=\frac{6k}{2k}\times\frac{k}{3k}=3\times\frac{1}{3}=1$

تنوع الاستراتيجيات

$\frac{a+c}{c}\times\frac{b-c}{b}=\left(\frac{a}{c}+1\right)\times\left(1-\frac{c}{b}\right)$

$\because \frac{4}{a}=\frac{2}{c} \quad \therefore \frac{4}{2}=\frac{a}{c}\ ,\ \because \frac{3}{b}=\frac{2}{c} \quad \therefore \frac{c}{b}=\frac{2}{3}$

$\therefore \left(\frac{a}{c}+1\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{4}{2}+1\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=3\times\frac{1}{3}=1$

$\therefore \frac{a+c}{c}\times\frac{b-c}{b}=1$

مثـال 9

إذا كان: $a:b:c=3:4:5$ فأثبت أن: $a^2+b^2=c^2$

الحـل

$\because a:b:c=3:4:5$

$\because \frac{a}{b}=\frac{3}{4} \quad , \quad \frac{b}{c}=\frac{4}{5}$

$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{4}$ ---------- (1) , $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$ ---------- (2)

من (1) ، (2) نستنتـج أن: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k \quad , \quad (k\neq 0)$

$\therefore a=3k \quad , \quad b=4k \quad , \quad c=5k$

$\therefore a^2+b^2=(3k)^2+(4k)^2=9k^2+16k^2=25k^2$ ---------- (3)

$\because c^2=(5k)^2=25k^2$ ---------- (4)

من (3) ، (4) نستنتـج أن: $a^2+b^2=c^2$

سؤال 5

إذا كان: $a:b:c=5:7:3$ وكان: $a+b=48$

فأوجد قيمة كل من: $a\ ,\ b\ ,\ c$

أسئلة الكتاب المدرسى

التناسب وخواصه:

1 فى كل مما يأتى: هل الكميات متناسبة؟ وإذا كانت متناسبة فاكتب التناسب:

1 $2 , 5 , 4 , 10$ 2 $5 , 9 , 15 , 27$ 3 $3 , 4 , 6 , 9$

2 أوجد قيمة الرمز المجهول الذى يجعل كلًّا من الكميات الآتية متناسبة:

1 $3 , 4 , x , 20$ 2 $5 , 2 , 2a , 8$ 3 $4 , 5 , x , 10$

4 $x , 20 , 30 , 60$ 5 $2 , 7 , 5 , \frac{x}{2}$ 6 $a , 15 , 20 , 3a$

7 $10 , a , 5a , 18$ 8 $\frac{x}{2} , \frac{7}{x} , \frac{3x}{2} , \frac{7}{3}$

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت النسبة 3 : 5 تكافئ النسبة 9 : x فإن: $x =$ ....

(أ) 5   (ب) 10   (جـ) 15   (د) 20

2 ما الثانى المتناسب للكميات 12 , 6 , 4؟ ....

(أ) 18   (ب) 8   (جـ) 6   (د) 2

3 إذا كان: $\frac{2}{7} = \frac{a}{b}$ فما قيمة: $\frac{2b}{7a}$ ؟ ....

(أ) $\frac{4}{49}$ (ب) $\frac{2}{7}$ (جـ) 1   (د) $\frac{49}{4}$

4 إذا كان: $2x = 7y$ فإن: $\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} =$ ....

(أ) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{7}{2}$ (جـ) $\frac{49}{7}$ (د) $\frac{4}{49}$

5 إذا كان: $5x - 3y = 0$ فما قيمة: $\frac{x}{y}$؟ ....

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) $\frac{-3}{5}$ (د) $\frac{-5}{3}$

6 إذا كان: $\frac{y}{10} = \frac{x}{6}$ فما قيمة: $\frac{x}{y}$ ؟ ....

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{5}{6}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{5}{10}$

7 إذا كان: $\frac{5a - 7b}{18a + 11b} = 0$ ، فإن: $\frac{b}{a} =$ ....

(أ) 0   (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{7}{5}$ (د) $\frac{11}{18}$

8 إذا كان: $\frac{a - b}{3} = \frac{a + b}{5}$ ، فإن: $\frac{a}{b} =$ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2   (جـ) 4   (د) $\frac{1}{4}$

9 إذا كان: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ ، وكان $5a + 4b = 80$ ، فإن: .... $= a + b$

(أ) 8　(ب) 9　(جـ) 10　(د) 18

10 إذا كان: $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ ، فما قيمة $\frac{a+b}{a-b}$ ؟............

(أ) $\frac{8}{3}$　(ب) $\frac{5}{3}$　(جـ) $\frac{1}{4}$　(د) 4

11 إذا كان: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ ، فما قيمة $\frac{3a-b}{b-a}$ ؟............

(أ) $\frac{4}{3}$　(ب) $\frac{3}{4}$　(جـ) $\frac{1}{5}$　(د) 5

12 إذا كان: $\frac{3}{m} = \frac{5}{n}$ ، وكان $(m - n = 6)$ ، فما قيمة m؟............

(أ) 15　(ب) 9　(جـ) -9　(د) -15

13 إذا كان: $3a = 6b = 8c$ ، فإن: $a : b : c$ تساوى............

(أ) $3 : 4 : 8$　(ب) $3 : 6 : 8$　(جـ) $8 : 4 : 3$　(د) $8 : 6 : 3$

4 أجب عما يأتى:

1 ما العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة $7 : 12$ فإنها تصبح $2 : 3$

2 أوجد العدد الذى إذا طُرح من حدى النسبة $33 : 26$ أصبحت $3 : 4$

3 أوجد العدد الذى إذا طُرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{49}{69}$ فإنها تصبح $\frac{2}{3}$

4 أوجد العدد الذى إذا طُرح مربعه من حدى النسبة $\frac{13}{15}$ أصبحت $\frac{2}{3}$

5 أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد 18 , 11 , 12 , 7 تصبح أعدادًا متناسبة.

6 أوجد العدد الذى إذا طُرح من كل من الأعداد 21 , 17 , 13 , 11 أصبحت أعدادًا متناسبة.

5 إذا كان: $3x + y : 3y - 5x = 3 : 8$ ، فأوجد فى أبسط صورة: $x : y$

6 إذا كان: $\frac{3a+4b-c}{4} = \frac{a+3b+3c}{3}$ ، فأوجد قيمة: $\frac{a}{c}$

7 إذا كان: $\frac{14y-6}{14y+10} = \frac{7x-3}{7x+5}$ ، فأثبت أن: $\frac{x}{y} = 1$

8 فى كل مما يأتى أثبت أن: الأعداد a , b , c , d متناسبة إذا كان:

1 $\frac{3a-2c}{3b-2d} = \frac{a}{b}$　2 $\frac{a-2b}{c-2d} = \frac{5a+b}{5c+d}$　3 $\frac{3a+5b}{3a-5b} = \frac{3c+5d}{3c-5d}$

9 إذا كانت: $x : y = 2 : 5$ ، فأوجد قيمة: $(10x + 3y) : (5x + 2y)$

10 إذا كان: $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5}$ ، فأثبت أن: $\frac{a - 2b + 3c}{2a + b + c} = \frac{14}{13}$

11 إذا كان: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ، فأثبت أن: $\frac{2y - z}{3x - 2y + z} = \frac{1}{2}$

12 إذا كان: $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ، فأثبت أن: $\sqrt{3a^2 + 4b^2 + c^2} = 4a$

13 إذا كان: a , b , c , d أربع كميات متناسبة، فأثبت أن:

1 $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$

2 $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$

3 $\frac{b + d}{b} = \frac{a + b + c + d}{a + b}$

4 $\frac{a^2 - 2ac + c^2}{ac} = \frac{b^2 - 2bd + d^2}{bd}$

5 $\frac{3a + 4c}{3b + 4d} = \frac{2a - c}{2b - d}$

6 $\frac{5a + 7c}{5b + 7d} = \frac{9a - c}{9b - d}$

14 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ، فأثبت أن: $\sqrt{\frac{a^2 - c^2 - e^2}{b^2 - d^2 - f^2}} = \frac{a}{b}$

15 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ، فأثبت أن: $\sqrt[3]{\frac{7a^2c + 5ae^2 - 2ce^2}{7b^2d + 5bf^2 - 2df^2}} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$

16 إذا كانت الكميات: a , b , c , d , e , f متناسبة، فأثبت أن: $\frac{3a - 5c - 2e}{3b + 5d - 2f} = \frac{a + 2e}{b + 2f}$

17 إذا كان: $4a = 3b = 6c$ ، $a + b + c = 36$ فأوجد قيمة كل من: a , b , c

18 إذا كان: $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ، وكان $x + y - 2z = 12$ فأوجد قيمة: z

19 إذا كانت a , b , c أعدادًا موجبة بحيث: $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ، وكان $a^2 + b^2 + c^2 = 725$ فأوجد قيمة: $a + b - c$

20 ألعاب الكمبيوتر:



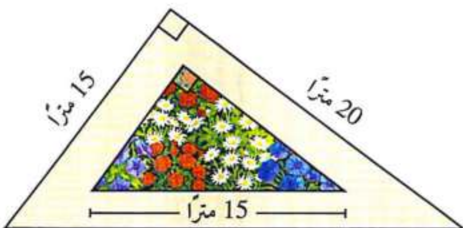
فى إحدى ألعاب الكمبيوتر سجل عمر وخالد وحمزة 581 نقطة معًا، بحيث إن أربعة أمثال نقاط عمر تساوى خمسة أمثال نقاط خالد، وتساوى سبعة أمثال نقاط حمزة.

أوجد النقاط التى حصل عليها كل منهم.

تفكير إبداعي TIMSS

21 أربعة أعداد متناسبة، فإذا كان الثانى المتناسب هو الجذر التربيعى الموجب للرابع المتناسب، والأول المتناسب ينقص 1 عن الثانى المتناسب، والثالث المتناسب هو 6، فأوجد تلك الأعداد الأربعة.

22 تنسيق الحدائق: فى الشكل المقابل حوض للزهور على شكل مثلث قائم الزاوية داخل قطعة أرض مثلثة الشكل أطوال أضلاعها تتناسب مع أطوال الأضلاع التى تناظرها فى حوض الزهور، ما طولا ضلعى القائمة لحوض الزهور؟



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الرابع المتناسب للأعداد 16 , 12 , 4 هو ....

(أ) 24 (ب) ± 24 (جـ) 48 (د) ± 48

2 إذا كان: $\frac{b}{6} = \frac{a}{5}$ ، وكان $6a + 5b = 60$ فإن: $a =$ ....

(أ) 5 (ب) 6 (جـ) 60 (د) 11

3 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ ، فإن: $\frac{a+b}{a-b} =$ ....

(أ) $\frac{6}{5}$ (ب) -11 (جـ) -3 (د) 1

4 إذا كانت: a, b, c, d كميات متناسبة، فإن: $\frac{ad - bc}{a^2 + b^2 + c^2} =$ ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

5 إذا كان: $\frac{x + 2y}{3x - y} = \frac{2}{3}$ فإن: $\frac{y}{x} =$ ....

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) 1 (جـ) $\frac{-3}{8}$ (د) $\frac{8}{3}$

6 إذا كان: $\frac{b}{5} = \frac{a}{3}$ ، فإن: $5a - 3b + 4 =$ ....

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

2 أكمل ما يأتي:

1 إذا كان: $7a = 14b$ ، فإن: $\frac{b}{a} =$ .... (فى أبسط صورة)

2 الثالث المتناسب للكميات: 24 , 6 , 3 يساوى ....

3 إذا كان: $2a - b = 0$ ، فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} =$ ....

3 أجب عما يأتي:

1 إذا كان $2x + 5 : 3x - 3 = 5 : 4$ **فأوجد** قيمة x

2 إذا كان a , b , c , d كميات متناسبة **فأثبت أن:** $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

3 إذا كان $a : b : c = 1 : 2 : 3$ وكان $b + c = 25$

فأوجد قيمة كل من: a , b , c

ذاكر الدرس 1

خواص التناسب (Properties of Proportion) الجزء 2





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على باقى خواص التناسب.
- يستخدم الطالب هذه الخواص فى حل العديد من المشكلات.

مفردات أساسية

- التناسب (**Proportion**)
- الطرفان (**Extremes**)
- الوسطان (**Means**)
- الضرب التبادلى (**Cross Multiplication**)



فكر وناقش

- تعلم أن: $\frac{6}{9} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

فإذا جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسبتين الأولى والثانية نحصل على النسبة: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2+4}{3+6}$

وإذا جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسبتين الثانية والثالثة نحصل على النسبة: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{4+6}{6+9}$

وإذا جمعنا مقدمات وجمعنا توالى النسب الثلاث نحصل على النسبة : $\frac{2}{3} = \frac{12}{18} = \frac{2+4+6}{3+6+9}$

فماذا تلاحظ ؟

- **وفى هذا الدرس سوف نتذكر باقى خواص التناسب، وسندرس الخاصية (3) التى ستمكنك من حل مثل هذه المشكلات.**

تعلم **خاصية (3)** إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots\dots = k$ فإن:



1 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k$ أى أن : $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} =$ إحدى النسب

2 $\frac{am+cn+e\ell+\dots}{bm+dn+f\ell+\dots} = k$ حيث m , n , ℓ ,......... أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

الإثبـــات:

1 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{bk+dk+fk+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{k\,(b+d+f+\dots)}{(b+d+f+\dots)} = k$

2 ∵ النسبة لا تتغير قيمتها إذا ضرب كل من حديها فى مقدار ثابت لا يساوى الصفر

$\therefore \frac{am}{bm} = \frac{cn}{dn} = \frac{e\ell}{f\ell} = \dots\dots\dots = k$ $\therefore \frac{am+cn+e\ell+\dots}{bm+dn+f\ell+\dots} = k$

مثـال 1

إذا كان : $\frac{5a-b+4c}{8x} = \frac{a}{8} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ فأوجد قيمة x

الحـل

بضرب حدى النسبة الأولى × (5) ، وبضرب حدى النسبة الثانية × (1−) ، وبضرب حدى النسبة الثالثة × (4) ، ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\therefore \frac{5a-b+4c}{5\,(8)+(-1)\times(4)+4\,(5)} =$ إحدى النسب

$\therefore \frac{5a-b+4c}{56} = \frac{5a-b+4c}{8x}$ $\therefore 8x = 56$ $\therefore x = 7$

مثـال 2

إذا كان : $\frac{4a+mb+5c}{25} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ، فأوجد قيمة m

الحـل

بضرب حدى النسبة الأولى × (4) ، وحدى النسبة الثانية × (m) ، وحدى النسبة الثالثة × (5) ، ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\frac{4a+mb+5c}{4\,(3)+m\,(4)+5\,(5)} =$ إحدى النسب

$\therefore \frac{4a+mb+5c}{12+4m+25} = \frac{4a+mb+5c}{4m+37} =$ إحدى النسب

$\because \frac{4a+mb+5c}{4m+37} = \frac{4a+mb+5c}{25}$ ، $\therefore 4m+37 = 25$ $\therefore 4m = 25-37$

$\therefore 4m = -12$ $\therefore m = -3$

س؟ سؤال 1

إذا كان : $\frac{a-2b+4c}{3x+10} = \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ فأوجد قيمة x.

مثال 3

إذا كان : $\frac{a}{x-y+z}=\frac{b}{y-z+x}=\frac{c}{z-x+y}$ فأثبت أن : $\frac{a+b}{x}=\frac{b+c}{y}$



الحل

بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الأولى والثانية:

1 إحدى النسب $= \frac{a+b}{2x} = \frac{a+b}{x-y+z+y-z+x}\ \therefore$

بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين الثانية والثالثة:

2 إحدى النسب $= \frac{b+c}{2y} = \frac{b+c}{y-z+x+z-x+y}\ \therefore$

من 1 ، 2

$\therefore \frac{a+b}{2x}=\frac{b+c}{2y} \Rightarrow \frac{a+b}{x}=\frac{b+c}{y}$

مثال 4

إذا كان : $\frac{x+y}{7}=\frac{y+z}{5}=\frac{x+z}{8}$ فأوجد قيمة : $\frac{x+y+z}{x-z}$

الحل

بجمع المقدمات والتوالى للنسب الثلاث:

1 إحدى النسب $= \frac{x+y+z}{10} = \frac{2(x+y+z)}{20} = \frac{2x+2y+2z}{20} = \frac{x+y+y+z+x+z}{7+5+8}\ \therefore$

بضرب حدى النسبة الثانية × (1−) ، وبجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية:

2 إحدى النسب $= \frac{x-z}{2} = \frac{x+y-y-z}{7-5}\ \therefore$

من 1 ، 2

$\therefore \frac{x+y+z}{10}=\frac{x-z}{2}$

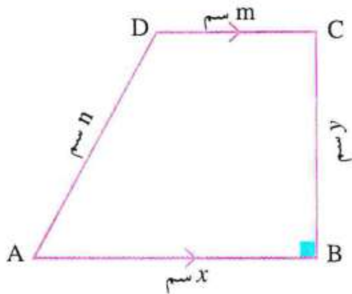
$\therefore \frac{x+y+z}{x-z}=\frac{10}{2}=5$

مثال 5

فى الشكل المقابل:

ABCD شبه منحرف قائم الزاوية فى B ، محيطه يساوى 36 سم،

إذا كان : $10x = 15y = 20m = 12n$ فأوجد قيم: x , y , m , n



الحل

$\because 10x = 15y = 20m = 12n$

حيث 60 هو المضاعف المشترك الأصغر للمعاملات:

$\therefore \frac{10x}{60}=\frac{15y}{60}=\frac{20m}{60}=\frac{12n}{60}$

$\therefore \frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{m}{3}=\frac{n}{5}=k$

1 $\therefore x=6k\ ,\ y=4k\ ,\ m=3k\ ,\ n=5k$

$\because$ محيط الشكل = 36 سم أى أن: $x+y+m+n=36$

من 1 $\therefore 6k+4k+3k+5k=36$

$\therefore 18k=36$ $\qquad \therefore k=2$

$\therefore x=12\ ,\ y=8\ ,\ m=6\ ,\ n=10$

تنوع الاستراتيجيات

$\because \frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{m}{3}=\frac{n}{5}$

$\therefore \frac{x+y+m+n}{18}=\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{m}{3}=\frac{n}{5}$

$\therefore \frac{36}{18}=\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{m}{3}=\frac{n}{5}$

$\therefore \frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{m}{3}=\frac{n}{5}=2$

$\therefore x=12\ ,\ y=8\ ,\ m=6\ ,\ n=10$

سؤال 2

إذا كان : $\frac{z+x}{6}=\frac{y+z}{3}=\frac{x+y}{5}$ فأثبت أن: $\frac{7}{2}=\frac{x+y+z}{x-z}$

أسئلة الكتاب المدرسي

خاصية (3):

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{2}{3}$ ، فإن: $\frac{a+c}{b+d}$ تساوى ....

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{4}{9}$ (د) $\frac{1}{3}$

2 إذا كان: $\frac{x}{6}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{a}{11}$ ، فإن: $a=$ ....

(أ) $x+y+z$ (ب) $2x+y$ (جـ) $x+y$ (د) $y+z$

3 إذا كان: $\frac{x}{y}=\frac{z}{\ell}=\frac{m}{n}$ ، فإن: $\frac{3x+2z+m}{3y+2\ell+n}=\frac{7m}{.....}$

(أ) $7y$ (ب) 7ℓ (جـ) $7n$ (د) $7y+7\ell+7n$

4 إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{15}{8}$ ، فإن: $\frac{2b+5d}{2a+5c}=$ ....

(أ) $\frac{15}{8}$ (ب) $\frac{8}{15}$ (جـ) $\frac{13}{8}$ (د) $\frac{15}{13}$

5 إذا كان: $\frac{x+z}{8}=\frac{y+z}{5}=\frac{x+y}{7}$ ، فإن إحدى النسب $=\frac{x+y+z}{.....}$

(أ) $x-z$ (ب) 20 (جـ) 10 (د) $y+7$

6 إذا كان: $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{x+2y}{k}$ ، فإن: $k=$ ....

(أ) 9 (ب) 13 (جـ) 14 (د) 8

7 إذا كان: $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{2x+y+z}{5k}$ ، فإن: $k=$ ....

(أ) 4 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 12

8 إذا كان: $\frac{x}{a}=\frac{y}{6}=\frac{4x-3y}{10}$ ، فإن: $a=$ ....

(أ) 16 (ب) 4 (جـ) 14 (د) 7

9 إذا كان: $\frac{a}{c+a-b}=\frac{b}{a+b-c}=\frac{c}{b+c-a}$ ، فإن كل نسبة تساوى ....

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) 1

---

2 إذا كان: $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\frac{x-2y+4z}{k+20}$ ، فأوجد قيمة k

---

3 إذا كان: $\frac{a}{8}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{5a-b+4c}{8x}$ ، فأوجد قيمة x

4 إذا كان: $\frac{6x-5y}{11}=\frac{y}{k}=\frac{2x}{7}$ ، فأوجد قيمة: k

5 إذا كان: $3x = 4y = 2z$ وكان: $x + y + z = 39$ ، فأوجد قيمة: x , y , z

6 إذا كان: $\frac{b}{x-4y}=\frac{a}{4x+y}$ ، فأثبت أن: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{5x+3y}{3x+5y}$

7 إذا كان: $\frac{b}{2x-y}=\frac{a}{x+y}$ ، فأثبت أن: $\frac{2a+b}{4x+y}=\frac{3a-b}{x+4y}$

8 إذا كان: $\frac{x+z}{8}=\frac{y+z}{5}$ ، $\frac{x+y}{7}$ فأوجد قيمة: $\frac{x+y+z}{x-z}$

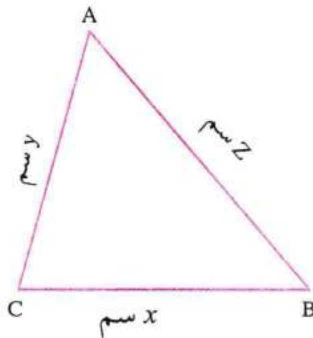
9 إذا كان: $\frac{c}{z-x+y}=\frac{b}{y-z+x}=\frac{a}{x-y+z}$ ، فأثبت أن: $\frac{a+b}{x}=\frac{b+c}{y}$

10 إذا كان: $\frac{z+x}{6}=\frac{y+z}{5}=\frac{x+y}{3}$ ، فأثبت أن: $\frac{x+y+z}{2x+3y+3z}=\frac{7}{19}$

تفكير إبداعي TIMSS

11 في الشكل المقابل:

ABC مثلث محيطه 61 سم، وأطوال أضلاعه x سم، y سم، Z سم،
إذا تم تقليل الطول x بمقدار 8 سم، وتقليل الطول Z بمقدار 4 سم،
وزيادة الطول y بمقدار 15سم، أصبحت هذه الأطوال تتناسب
مع الأعداد 3 ، 5 ، 8 على الترتيب.
فاحسب طول الضلع $\overline{AB}$



12 إذا كان: $\frac{y-z}{4}=\frac{2x+z}{9}=\frac{x+y}{5}$

فأوجد قيمة: $\frac{x+y+z}{x+y-z}$

13 إذا كان: $13 = \frac{y^2+2xy}{x}=\frac{x^2-9}{y+3}$ ، فأوجد قيمة: $x + y$

حيث: $x + y + 3 \neq 0$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{5}$، فإن: $\frac{a+c+e}{b+d+f}=$ ....

(أ) $\frac{9}{5}$ (ب) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{1}{5}$

2 إذا كان: $\frac{x}{7}=y=\frac{z}{9}$ ، فإن: $\frac{x+y+z}{z-y-x}=$ ....

(أ) $\frac{1}{17}$ (ب) 17 (جـ) $\frac{1}{16}$ (د) 16

3 إذا كان: $36 , x , 9 , 3$ كميات متناسبة، فإن: $x=$ ....

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

4 إذا كان: $4a-3b=0$ ، فإن: $a:b=$ ....

(أ) $3:4$ (ب) $3:7$ (جـ) $4:3$ (د) $4:7$

5 إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، وكان: $\frac{x+3c}{5b+3d}=\frac{a}{b}$ ، فإن: $x=$ ....

(أ) 3a (ب) a (جـ) 5b (د) 5a

6 إذا كان: $\frac{a-2b}{k}=\frac{b}{5}=\frac{a}{12}$ ، فإن: $k=$ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

2 أكمل ما يأتي:

1 إذا كان: $3 , 2 , b , a$ كميات متناسبة، فإن: $\frac{b}{a}=$ ....

2 إذا كان: $2a=3b$ ، فإن: $\frac{3a}{2b}=$ ....

3 إذا كان: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{5}{8}$ ، فإن: $\frac{b+d}{a+c}=$ ....

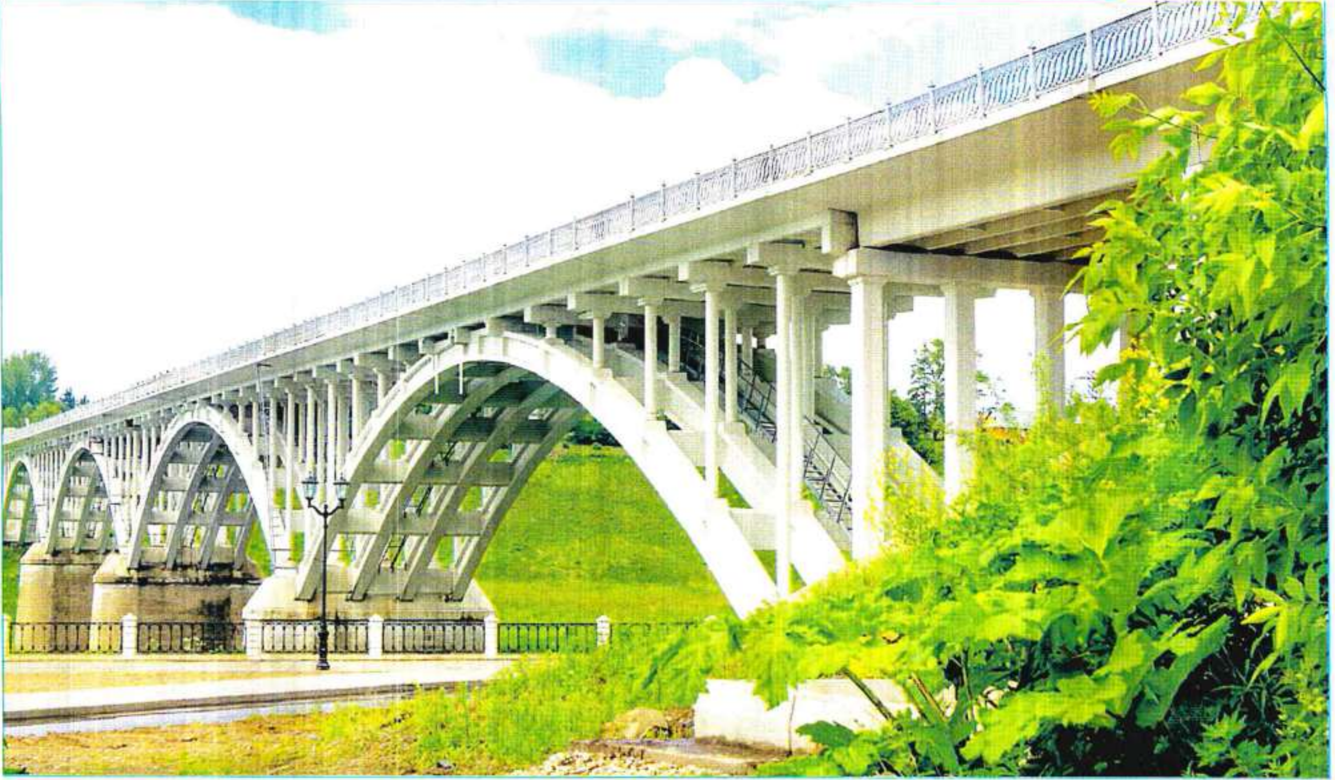
3 أجب عما يأتي:

1 إذا كان: $\frac{x+y}{7}=\frac{y+z}{5}=\frac{z+x}{8}$ ، فأثبت أن: $\frac{x-z}{x+y+z}=\frac{1}{5}$

2 إذا كان: d , c , b , a كميات متناسبة، فأثبت أن: $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{ac}{bd}$

3 أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة 18 : 17 ، وطُرح مربعه من تاليها، فإننا نحصل على النسبة 2 : 3 .

ذاكر الدرس 2 التناسب المتسلسل (Continued Proportion)



 ## نواتج التعلم



- يتعرف الطالب على مفهوم التناسب المتسلسل.
- يعرف الطالب مفهوم الوسط المتناسب بين عددين.
- يستخدم الطالب خواص التناسب المتسلسل فى حل التمارين.
- يستخدم الطالب التناسب المتسلسل فى حل بعض المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

- التناسب المتسلسل (**Continued Proportion**)
- الوسط المتناسب (**Mean Proportional**)

 ## فكر وناقش

لدى باسم شريط طوله 19سم ، يريد أن يصنع منه مثلثًا أطوال أضلاعه متناسبة، بحيث يكون طول أكبر الأضلاع فيه 9سم.

فما طول كل من الضلعين الآخرين؟



فى هذا الدرس، سوف تتعرف على مفهوم «التناسب المتسلسل» وخواصه؛ مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم التناسب المتسلسل

- إذا كانت: a , b , c كميات متناسبة، فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
- ويسمى هذا التناسب بالتناسب المتسلسل.
  - يُسمى a بالأول المتناسب.
  - يُسمى b بالوسط المتناسب بين a , c (ويسمى b أيضًا بالوسط الهندسى بين a , c).
  - يُسمى c بالثالث المتناسب.

فمثلًا: الأعـداد 48 , 12 , 3 فى تناسب متسلسل

لأن: $\frac{12}{48} = \frac{3}{12}$ (حيث كل من النسبتين تساوى $\frac{1}{4}$)

الأعـداد 18 , 9 , 6 ليست فى تناسب متسلسل

لأن: $\frac{9}{18} \neq \frac{6}{9}$ (حيث $\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ ، بينما $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$)

الوسط المتناسب:

- إذا كان: b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
- ومن الضرب التبادلى يكون: $b^2 = ac \Longleftrightarrow b = \pm\sqrt{ac}$

مثال 1

1 أوجد الأول المتناسب للعددين: 12 , 9

2 أوجد الوسط المتناسب بين العددين: 2 , 8

3 أوجد الوسط المتناسب بين: $3xy^3 , 27x^3y$

الحل

1 بفرض أن الأول المتناسب هو x

∴ x , 12 , 9 أعداد متناسبة

$\therefore \frac{x}{12} = \frac{12}{9}$ $\therefore 9x = 12 \times 12$

$\therefore x = \frac{12 \times 12}{9} = 16$

∴ الأول المتناسب للعددين 9 , 12 هو 16

2 بفرض أن الوسط المتناسب بين العددين 8 , 2 هو x

$\therefore x = \pm\sqrt{2 \times 8} = \pm 4$

أى أن:

الوسط المتناسب بين العددين 8 , 2 هو ± 4

3 بفرض أن الوسط المتناسب بين $3xy^3 , 27x^3y$ هو b

$\therefore b = \pm\sqrt{(3xy^3)(27x^3y)}$

$\therefore b = \pm\sqrt{81x^4y^4} = \pm 9x^2y^2$

∴ الوسط المتناسب بين $3xy^3 , 27x^3y$ هو $\pm 9x^2y^2$

سؤال 1

اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

1 الأول المتناسب للعددين 8 , 4 هو .... (8 ، 4 ، ±2 ، 2)

2 الوسط المتناسب بين $4a^3b , 16ab^3$ هو .... ($\pm 4a^2b^2$ ، $\pm 8ab$ ، $\pm 8a^2b^2$ ، $64a^2b^2$)

3 إذا كان: M , 6 , 4 كميات متناسبة، فإن M = ... (10 ، 9 ، 2 ، 24)

4 إذا كان: b وسطًا متناسبًا بين 20 , 5 ، فإن b = ... (±20 ، ±10 ، ±50 ، ±5)

مثـال 2

أوجد العدد الذى إذا أُضيف لكل من الأعداد: 14 , 6 , 2 فإنها تصبح متناسبـة.

الحـل

نفرض أن العدد هو x

$\therefore$ $2+x$, $6+x$, $14+x$ أعداد متناسبة

$\therefore \frac{(2+x)}{(6+x)} = \frac{(6+x)}{(14+x)}$ $\qquad \therefore (6+x)^2 = (2+x)(14+x)$

$\therefore 36 + 12x + x^2 = 28 + 16x + x^2$

$36 - 28 = 16x - 12x$

$8 = 4x \qquad \therefore x = 2$

$\therefore$ العدد هو 2

مثـال 3



إذا كان لدى إبراهيم ثلاثـة أبنـاء أعمارهم الآن 5 سنوات، 7 سنوات ، 11 سنة، **فمنذ كم عامًا كانت أعمارهم متناسبـة؟**

الحـل

نفرض أن أعمار الأبنـاء كانت متناسبـة منذ x من الأعوام.

$\therefore$ الأعمار هى: $11 - x$, $7 - x$, $5 - x$

$\because$ الأعمار متناسبـة

$\therefore \frac{5-x}{7-x} = \frac{7-x}{11-x}$

$\therefore (7-x)^2 = (5-x)(11-x)$

$49 - 14x + x^2 = 55 - 16x + x^2$

$\therefore -14x + 16x = 55 - 49$

$\therefore 2x = 6 \qquad \therefore x = 3$

$\therefore$ أعمار الأبناء الثلاثـة كانت متناسبة منذ 3 أعـوام.

س؟ سؤال 2

1. **أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد: 17 , 5 , 1 فإنها تصبح متناسبة.**
2. **أوجد العدد الذى إذا طُرح من كل من الأعـداد: 19 , 7 , 3 فإنها تُكوِّن تناسبًا متسلسلًا.**

مثال 4

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين $(5+\sqrt{3})$ ، $(10-\sqrt{12})$ فأوجد قيمة b

الحل

$\because$ b وسط متناسب بين $(5+\sqrt{3})$ ، $(10-\sqrt{12})$

$$\therefore b = \pm\sqrt{(10-\sqrt{12})(5+\sqrt{3})} = \pm\sqrt{(10-2\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \pm\sqrt{2(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{2(25-3)} = \pm\sqrt{2\times 22} = \pm 2\sqrt{11} \qquad \therefore b = \pm 2\sqrt{11}$$

مثال 5

إذا كان: $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$ ، **فأثبت أن b وسط متناسب بين a , c**

الحل

$$\therefore \frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$$

$$\therefore (2b+3c)(a+2b) = (2a+3b)(b+2c)$$ (الضرب التبادلى)

$$\therefore 2ab + 4b^2 + 3ac + 6bc = 2ab + 4ac + 3b^2 + 6bc$$

$$\therefore 4b^2 + 3ac = 4ac + 3b^2$$

$$\therefore 4b^2 - 3b^2 = 4ac - 3ac \qquad \therefore b^2 = ac$$

$\therefore$ b وسط متناسب بين a , c

مثال 6



مثلث محيطه 19سم وأكبر أضلاعه طولًا يساوى 9سم ، وكانت أطوال أضلاعه متناسبة،
فما طول الضلعين الآخرين؟

الحل نفرض أن أطوال أضلاع المثلث هى: $x , 9 , (10-x)$

ولكى تكون أطوال أضلاع المثلث متناسبة يجب ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

$\therefore$ تكون أطوال أضلاع المثلث هى: $(10-x) , x , 9$ ⟵ $\therefore \frac{(10-x)}{x} = \frac{x}{9}$

$\therefore x^2 = 90 - 9x$ (بالضرب التبادلى)

$\therefore x^2 + 9x - 90 = 0$ ⟶ $\therefore (x-6)(x+15) = 0$

$\therefore x - 6 = 0$ أو $x + 15 = 0$

$\therefore x = 6$ | $x = -15$ مرفوض

$\therefore$ طولا الضلعين الآخرين هما 6سم ، 4سم

سؤال 3

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين $(3-\sqrt{7})$ ، $(6+\sqrt{28})$ ، فأوجد قيمة b

نقاط هامة

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر، فإن:

① $b = ck$

② $a = bk = (ck)k = ck^2$

مثال 7

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، فأثبت أن: $\frac{a^2+b^2}{a} = \frac{b^2+c^2}{c}$

الحل

$\because \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \quad , \quad (k \neq 0)$

$\therefore b = ck \quad , \quad a = ck^2$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a} = \frac{c^2k^4+c^2k^2}{ck^2} = \frac{c^2k^2(k^2+1)}{ck^2}$

$= c(k^2+1)$ .... ①

$\frac{b^2+c^2}{c} = \frac{c^2k^2+c^2}{c} = \frac{c^2(k^2+1)}{c}$

$= c(k^2+1)$ .... ②

تنوع الاستراتيجيات

$\because \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad \therefore b^2 = ac$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a} = \frac{a^2+ac}{a}$

$= \frac{a(a+c)}{a} = (a+c)$ .... ①

$\frac{b^2+c^2}{c} = \frac{ac+c^2}{c}$

$= \frac{c(a+c)}{c} = (a+c)$ .... ②

من ① ، ② $\therefore \frac{a^2+b^2}{a} = \frac{b^2+c^2}{c}$

مثال 8

إذا كانت 27 , y , x فى تناسب، وكان $x - y = 30$ ، فأوجد كلًا من x , y

الحل

$\because$ 27 , y , x فى تناسب متسلسل

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{y}{27}$

(بضرب حدى النسبة الثانية × (1−) ثم جمع المقدمات وجمع التوالى للنسبتين)

$\therefore \frac{x-y}{y-27} = \frac{y}{27} \quad , \quad \because x - y = 30$

$\therefore \frac{30}{y-27} = \frac{y}{27}$

$\therefore y^2 - 27y = 810$ (بالضرب التبادلى)

$\therefore y^2 - 27y - 810 = 0$

$\therefore (y-45)(y+18) = 0$

$\therefore y + 18 = 0$ أو $\therefore y - 45 = 0$

$\therefore y = -18$ | $\therefore y = 45$

$, \therefore x = 30 + y$ | $, \therefore x = 30 + y$

$\therefore x = 30 - 18 = 12$ | $\therefore x = 30 + 45 = 75$

س سؤال 4

إذا كان b وسطًا متناسبًا بين c , a فأثبت أن: $\frac{c}{a} = \left(\frac{b-c}{a-b}\right)^2$

تعميم التناسب المتسلسل:

- يقال إن الكميات .... a , b , c , d فى تناسب متسلسل

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} =$ ....

ويكـون:
- b وسطًا متناسبًا بين a , c
- c وسطًا متناسبًا بين b , d ، وهكذا ...

فمثلًا: الأعـداد 2 , 6 , 18 , 54 فى تناسب متسلسل

لأن: $\frac{54}{18} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2}$ (لاحظ أن كل نسبـة تساوى 3)

كما تلاحظ أيضًا أن:
- 18 وسط متناسب بين 6 , 54 حيث: $(18)^2 = 54 \times 6$
- 6 وسـط متناسـب بين 2 , 18 حيث: $(6)^2 = 18 \times 2$

مثـال 9

إذا كان b , 9 , 3 , a فى تناسب متسلسل، فأوجد قيمة كل من a , b

الحـل

$\because$ b , 9 , 3 , a فى تناسب متسلسل

$\therefore$ 3 وسط متناسب بين 9 , a

$\therefore (3)^2 = a \times 9$ $\therefore a = \frac{(3)^2}{9} = \frac{9}{9} = 1$ $\therefore a = 1$

، $\because$ 9 وسط متناسب بين b , 3

$\therefore (9)^2 = 3 \times b$ $\therefore b = \frac{(9)^2}{3} = \frac{81}{3} = 27$ $\therefore b = 27$

نقاط هامة

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر، فـإن:

① $c = dk$	② $b = ck = (dk)k$ $\therefore b = dk^2$	③ $a = bk = (dk^2)k$ $\therefore a = dk^3$

سؤال 5

إذا كانت: 24 , b , a , 3 فى تناسب متسلسل، فأوجد قيمة كل من a , b

مثـال 10

إذا كانت: a , b , c , d فى تناسب متسلسل ، فأثبـت أن: $\frac{c^2 - d^2}{a - c} = \frac{bd}{a}$

الحـل

$\because$ a , b , c , d فى تناسب متسلسل

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \quad , \quad (k \neq 0)$$

$$\therefore a = dk^3 \quad , \quad b = dk^2 \quad , \quad c = dk$$

$$\therefore \frac{c^2 - d^2}{a - c} = \frac{(dk)^2 - d^2}{dk^3 - dk} = \frac{d^2k^2 - d^2}{dk^3 - dk} = \frac{d^2(k^2 - 1)}{dk\ (k^2 - 1)} = \frac{d}{k} \quad \text{......} (1)$$

$$\therefore \frac{bd}{a} = \frac{dk^2 \times d}{dk^3} = \frac{d}{k} \quad \text{......} (2)$$

من (1) ، (2) نستنتـج أن: $\frac{c^2 - d^2}{a - c} = \frac{bd}{a}$

مثـال 11

إذا كانت: a , b , c , d فى تناسب متسلسل ، فأثبـت أن: $\frac{b^2 - c^2}{c + d} = \frac{a^2 - bc}{a + b + c}$

الحـل

$\because$ a , b , c , d فى تناسب متسلسل

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \quad , \quad (k \neq 0)$$

$$\therefore a = dk^3 \quad , \quad b = dk^2 \quad , \quad c = dk$$

$$\therefore \frac{b^2 - c^2}{c + d} = \frac{(dk^2)^2 - (dk)^2}{dk + d} = \frac{d^2k^4 - d^2k^2}{dk + d} = \frac{d^2k^2(k^2 - 1)}{d\ (k + 1)}$$

$$= \frac{d^2k^2(k - 1)\cancel{(k + 1)}}{d\ \cancel{(k + 1)}} = dk^2(k - 1) \quad \text{......} (1)$$

$$\therefore \frac{a^2 - bc}{a + b + c} = \frac{(dk^3)^2 - (dk^2) \times dk}{dk^3 + dk^2 + dk} = \frac{d^2k^6 - d^2k^3}{dk^3 + dk^2 + dk} = \frac{d^2k^3(k^3 - 1)}{dk\ (k^2 + k + 1)}$$

$$= \frac{d^2k^3(k - 1)\ \cancel{(k^2 + k + 1)}}{dk\ \cancel{(k^2 + k + 1)}} = dk^2(k - 1) \quad \text{......} (2)$$

من (1) ، (2) نستنتـج أن: $\frac{b^2 - c^2}{c + d} = \frac{a^2 - bc}{a + b + c}$

س؟ سؤال 6

إذا كان: a , b , c , d فى تناسب متسلسل ، فأثبـت أن: $\frac{a + d}{b - c + d} = \frac{a - c}{b - c}$

تدرّب الدرس 2

التناسب المتسلسل (Continued Proportion)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲ تقييم ▲ ابتكار

📖 أسئلة الكتاب المدرسى

التناسب المتسلسل:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c فإن: ....

(أ) $a^2 = b \times c$ (ب) $b^2 = a \times c$ (جـ) $c^2 = a \times b$ (د) $b = a \times c$

2 الوسط المتناسب الموجب للكميتين a , c هو ....

(أ) ac (ب) $\frac{c}{a}$ (جـ) $\frac{a}{c}$ (د) $\sqrt{ac}$

3 📖 أى الأعداد الآتية متناسبة؟ ....

(أ) 2 , 6 , 4 (ب) 3 , 5 , 8 (جـ) 3 , 9 , 27 (د) 1 , 4 , 9

4 الوسط المتناسب بين 8 , 2 هو ....

(أ) ± 8 (ب) ± 2 (جـ) ± 4 (د) ± 6

5 📖 إذا كان x هو الوسط المتناسب الموجب بين العددين 54 , 24 فما قيمة x؟ ....

(أ) 15 (ب) 36 (جـ) 39 (د) 78

6 الثالث المتناسب للعددين 6 , 3 هو ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (جـ) 9 (د) 12

7 📖 إذا كان: a الأول المتناسب للعددين 16 , 4 فما قيمة a؟ ....

(أ) 8 (ب) 4 (جـ) 2 (د) 1

8 📖 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 3$ فما قيمة: $\frac{a+b+c}{b+c+d}$ ؟ ....

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 9 (د) 6

9 📖 ما الثالث المتناسب للعددين x^3 , $2x^2$ ؟ ....

(أ) $2x$ (ب) $4x$ (جـ) x^2 (د) $2x^5$

10 الوسط المتناسب بين $a^3 b$, $16ab^3$ هو ....

(أ) $-8a^2 b^2$ (ب) $\pm 8ab$ (جـ) $8a^2 b^2$ (د) $\pm 4a^2 b^2$

11 📖 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين $(3 + \sqrt{2})$ ، $(12 - \sqrt{32})$ فما قيمة b ؟ ....

(أ) $\pm\sqrt{7}$ (ب) $\pm 2\sqrt{7}$ (جـ) $\pm 4\sqrt{7}$ (د) $\pm 16\sqrt{7}$

12 إذا كانت الكميات: $\frac{1}{y}$, x , m متناسبة، فإن: m = ...

(أ) $x^2 y$ (ب) y (جـ) xy (د) $\frac{x^2}{y}$

13 إذا كانت الكميات: xy , x , 4 متناسبة، فإن: .... = $\frac{x}{y}$

(أ) 16 (ب) 14 (جـ) 4 (د) ± 2

14 إذا كانت الكميات: $x + 15$, 6 , 2 متناسبة، فإن: .... $x =$

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

15 إذا كانت الكميات b , 4 , 2 , a فى تناسب متسلسل، فإن: .... $a + b =$

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 6 (د) 9

16 إذا كان: $3 = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، فأى مما يأتى صحيح؟ ....

(أ) $a = 3c$ (ب) $a = 9b$ (جـ) $a = 9c$ (د) $a = 6c$

17 إذا كان: $\frac{1}{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، فأى مما يأتى صحيح؟ ....

(أ) $a = 2c$ (ب) $c = 2a$ (جـ) $a = 4c$ (د) $c = 4a$

18 إذا كانت الكميات c , b , a فى تناسب متسلسل، فإن: .... $a^2 : b^2 =$

(أ) $a : c$ (ب) $a : b$ (جـ) $c : a$ (د) $b : a$

19 إذا كان: $5 = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ، فإن: d .... $a =$

(أ) 15 (ب) 125 (جـ) 35 (د) 135

20 إذا كان: $4 = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ فما قيمة: $\frac{a + d}{d}$ ؟ ....

(أ) 65 (ب) 49 (جـ) 37 (د) 25

21 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، فإن: $\frac{a}{c}$ تساوى ....

(أ) b^2 (ب) $\frac{a + b}{b + c}$ (جـ) $\frac{a^2}{b^2}$ (د) $\frac{ac}{b^2}$

22 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{4}$ ، $a - b = -1$ فما قيمة $a \times b$ ؟ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 4 (د) 8

23 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ ، وكان: $a + b + c = 122$ فما قيمة a ؟

(أ) 4 (ب) 32 (جـ) 40 (د) 50

2 فى كل مما يأتى: إذا كانت الأعداد فى تناسب، فأوجد قيمة x:

1 $4 , x , 9$ 2 $15 , x , 60$ 3 $x , 4 , 8$

4 $x , 24 , 144$ 5 $4 , 6 , x$ 6 $25 , 75 , x$

3 فى كل مما يأتى أوجد قيمة كلٍّ من x , y إذا كانت الكميات فى تناسب متسلسل:

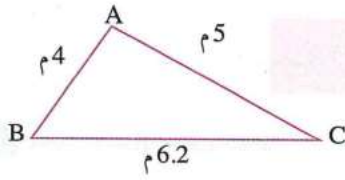
1 $x , 6 , 12 , y$ 2 $x , 6 , y , 54$

3 $x , y , 36 , 4$ 4 $2 , x , y , 54$

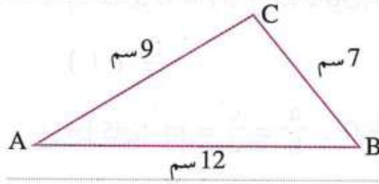
4 أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كلٍّ من الأعداد 18 , 8 , 3 تصبح أعدادًا متناسبة.

5 أوجد العدد الذى إذا طُرح من كلِّ الأعداد 12 , 8 , 6 تصبح أعدادًا متناسبة.

6 **أوجد** عدد الأمتار الذى يجب إضافته إلى طول كل ضلـع من أضـلاع المثلث المقابل لتصبـح أطوال أضلاعه متناسبة.



7 **ما عـدد** السنتيمتـرات التى يجـب طرحهـا من طول كل ضلع من أضلاع المثلث المقابل لتصبح أطوال أضلاعه متناسبة؟



8 إذا كان: b وسطًا متناسبًا بين a , c، **فأثبت أن:**

1 $a = \frac{b^2}{c}$ 2 $\frac{b-c}{a-b} = \frac{b}{a}$ 3 $\frac{b}{b+c} = \frac{a}{a+b}$ 4 $\frac{a-c}{a+b} = \frac{a-2b+c}{a-b}$

5 $\frac{2a+3b}{3c+2b} = \frac{a+5b}{b+5c}$ 6 $\frac{4a^2-9b^2}{4b^2-9c^2} = \frac{a}{c}$ 7 $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{2a}{c}$

9 إذا كانت الأعداد: x , y , 3 متناسبة، $x + y = 18$ **فأوجد قيمة كلٍّ من:** x , y

10 إذا كانت الأعداد: 27 , y , x فى تناسب ، $x - y = 30$ **فأوجد قيمة كلٍّ من:** x , y

11 إذا كانت: $\frac{1}{y}$, x , 7 فى تناسب متسلسل **فأوجد قيمة:** $x^4 y^2$

12 إذا كانت: b , 9 , 3 , a فى تناسب متسلسل **فأوجد قيمة كلٍّ من:** a , b

13 إذا كانت: 40 , b , a , 5 فى تناسب متسلسل **فأوجد قيمة كلٍّ من:** a , b

14 إذا كانت: 2y , 4 , 2 , x فى تناسب متسلسل **فأوجد قيمة:** $x + y$

15 إذا كانت: a , b , c , d فى تناسب متسلسل **فأثبت أن:**

1 $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^3 = \frac{a}{d}$ 2 $\frac{c^2+a}{b} = \frac{d^2+c}{d}$ 3 $\frac{a^2-3c^2}{b^2-3d^2} = \frac{b}{d}$

4 $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} = \frac{a}{d}$ 5 $\frac{2a^3+3b^3}{3a^3-4b^3} = \frac{2a+3d}{3a-4d}$

16 إذا كان: $\frac{b-a}{c-b} = \frac{3a-4b}{3b-4c}$ **فأثبت أن:** b وسط متناسب بين a , c

17 إذا كان: $\frac{b^2+c^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2}$ **فأثبت أن:** b وسط متناسب بين a , c

TIMSS تفكير إبداعى

18 **اختر الإجابة الصحيحة:**

1 إذا كان a : b = b : c ، فإن $a^4 : b^4$ يساوى ....

(أ) $ac : b^2$ (ب) $a^2 : c^2$ (جـ) $c^2 : a^2$ (د) $b^2 : ac$

2 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فإن $(a-b)^3 : (b-c)^3$ يساوى ....

(أ) $a^3 : c^3$ (ب) $a^2 : c^2$ (جـ) $a^3 : b^3$ (د) $b^2 : c^2$

19 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c **فأثبت أن:** $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}} = b^6$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $7x + 5y = 0$ ، فإن: $\frac{y}{x} =$ ....

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{7}{5}$ (جـ) $\frac{-5}{7}$ (د) $\frac{-7}{5}$

2 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ ، $m \neq 0$ فإن: $\frac{a \times c}{b \times d} =$ ....

(أ) $2m^2$ (ب) m^2 (جـ) m (د) $2m$

3 إذا كانت: $18 , 12 , x , 4$ كميات متناسبة، فإن: $x =$ ....

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) 2 (د) 54

4 إذا كان: $\frac{a}{5} = \frac{b}{9} = c = \frac{2a + b - c}{6k}$ ، فإن: $k =$ ....

(أ) 18 (ب) 6 (جـ) 3 (د) 9

5 إذا كان: b وسطًا متناسبًا بين 12 , 3 فما قيمة b ؟ ....

(أ) ± 4 (ب) ± 6 (جـ) ± 9 (د) ± 36

6 الأول المتناسب للعددين 8 , 4 يساوى ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 8 (د) 16

7 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$ فإن: $\frac{2a + 3c}{2b + 3d} =$ ....

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{m}$ (جـ) m (د) $2m$

8 إذا كان: $6a = 8b = 4c$ ، فإن $a : b : c$ تساوى ....

(أ) $3 : 4 : 2$ (ب) $2 : 4 : 3$ (جـ) $4 : 3 : 6$ (د) $6 : 4 : 3$

9 إذا كان: $\frac{a}{4} = \frac{b}{6}$ ، $b - a = 5$ فما قيمة a؟ ....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 8 (د) 10

2 أجب عما يأتى:

1 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ **فأوجد** قيمة النسبة: $\frac{9a - 2b}{4b - 2a}$

2 إذا كان: $\frac{3x + z}{3y + \ell} = \frac{x - z}{y - \ell}$ ، **فأثبت أن:** x , y , z , ℓ كميات متناسبة.

3 إذا كان: $a : b : c = 5 : 7 : 3$ وكان: $a + b = 27.6$ ، **فأوجد** قيمة كلٍّ من: a , b , c

4 إذا كان: $\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ **فأثبت أن:** $\frac{5b - 3c}{2c - 3a} = \frac{1}{2}$

5 **أوجد** العدد الذى إذا أضيف لكل من الأعداد: 14 , 6 , 2 فإنها تصبح فى تناسب متسلسل.

6 إذا كانت: a , b , c , d فى تناسب متسلسل، **فأثبت أن:** $\frac{a + d}{b - c + d} = \frac{a - c}{b - c}$

7 إذا كان: $\frac{a}{2a - b} = \frac{b}{2b - c}$ ، **فأثبت أن:** b وسط متناسب بين a , c

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كان $a : b = c : d$ فإن: $\frac{2a + 5c}{2b + 5d}$ لا تساوى ....

(أ) $\frac{a}{b}$ (ب) $\frac{c}{d}$ (جـ) $\frac{a + c}{b + d}$ (د) $\frac{a - c}{d - b}$

2 إذا كان: $3x = 5y = 4z$ ، فإن $x : y : z$ تساوى ....

(أ) $9 : 12 : 16$ (ب) $20 : 12 : 15$ (جـ) $15 : 10 : 9$ (د) $8 : 5 : 3$

3 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = 3$ ، فما قيمة $\frac{2a + 3b}{4b - 3c}$ ؟

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) $\frac{2}{3}$

4 ما الثالث المتناسب للكميتين: $x^2 - y^2 , x - y$ ؟

(أ) $x + y$ (ب) $x - y$ (جـ) $\frac{x + y}{x - y}$ (د) $\frac{x - y}{x + y}$

2 أكمل ما يأتى بالإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت الأعداد: $32 , b , a$ متناسبة، $a + b = 10$ ، فإن $(a , b) =$ ....

2 إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هى: $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ ومحيطه يساوى 104 سم،

فإن طول أكبر ضلع فى المثلث يساوى .... سم.

3 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 2$ ، فإن: .... $= \frac{a + d}{d}$

4 الوسط المتناسب بين العددين 48 , 3 يساوى ....

3 أجب عما يأتى:

1 إذا كانت: a , b, c , d فى تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\frac{a + b + c}{a - d} = \frac{a - b}{a - 2b + c}$

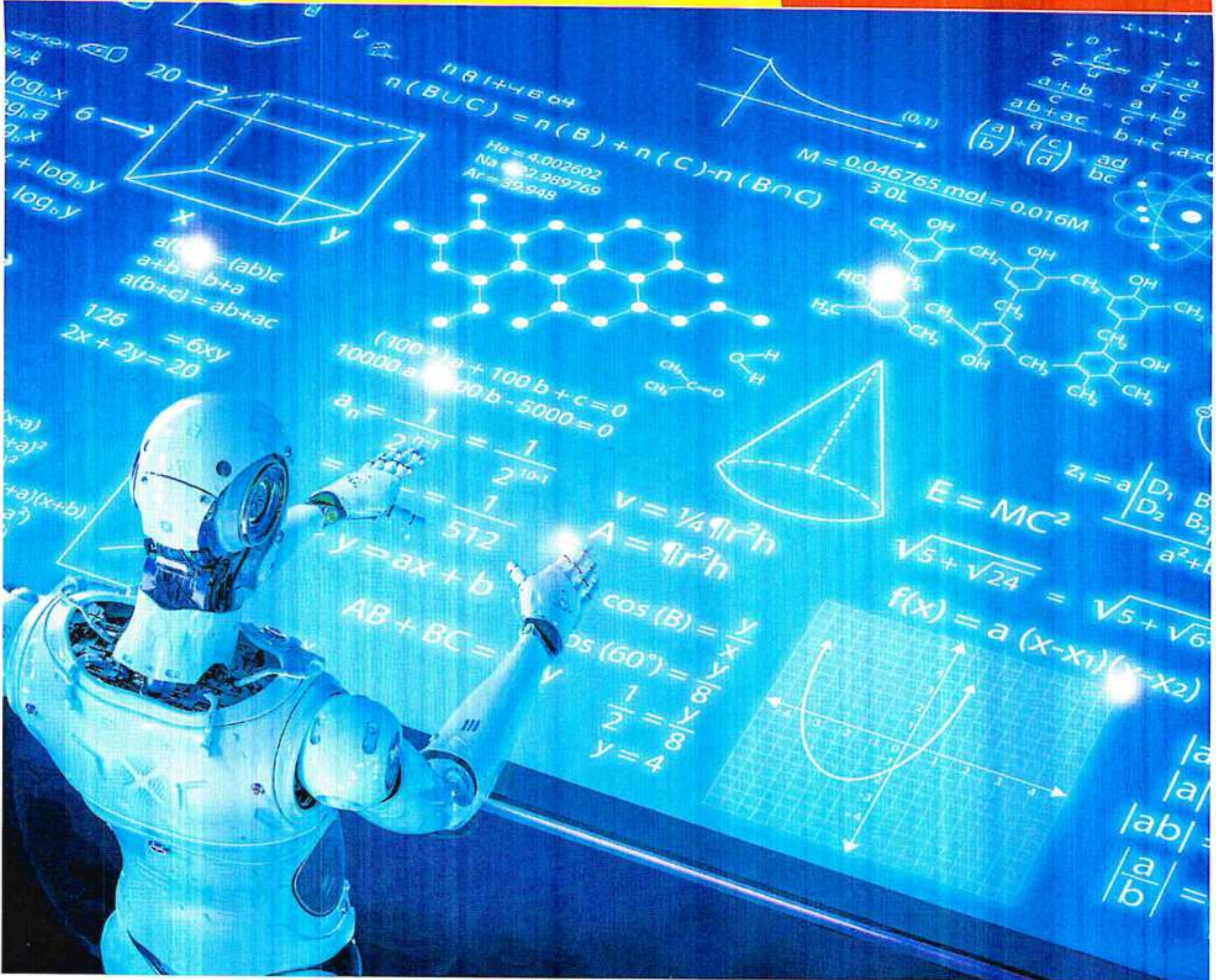
2 إذا كانت الكميات: $2x + 1 , 3 , 15 , 35$ متناسبة، فأوجد قيمة x العددية.

3 إذا كان: $\frac{a + b - c}{8} = \frac{a - b}{11} = \frac{a + b}{25}$ فأوجد النسبة $a : b : c$

4 أوجد العدد الذى إذا طرح من كل من الأعداد: 15 , 9 , 6 تصبح متناسبة.

الوحدة الثانية 2

الجبـر



دروس الوحـــدة

- **الـــدرس الأول :** حاصل الضرب الديكارتى (Cartesian Product)
- **الـدرس الثانى :** العلاقة والدالة (Relation and Function)
- **الـدرس الثالث :** الدالة الخطيــة (Linear Function)
- **الـدرس الرابع :** معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد (Equations and Inequalities of the First Degree in one Variable)

يُعد مفهوم الدالة الخطية من الأسس الرياضية التى تقوم على دراسة النماذج الذكية والتى تظهر بوضوح فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى، إذ تعتمد النماذج الذكية على التنبؤ بالنتائج بناء على العلاقات الرياضية بين المتغيرات.

- **فهل يمكن استخدام مفاهيم وقوانين العلاقات والدوال الخطية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

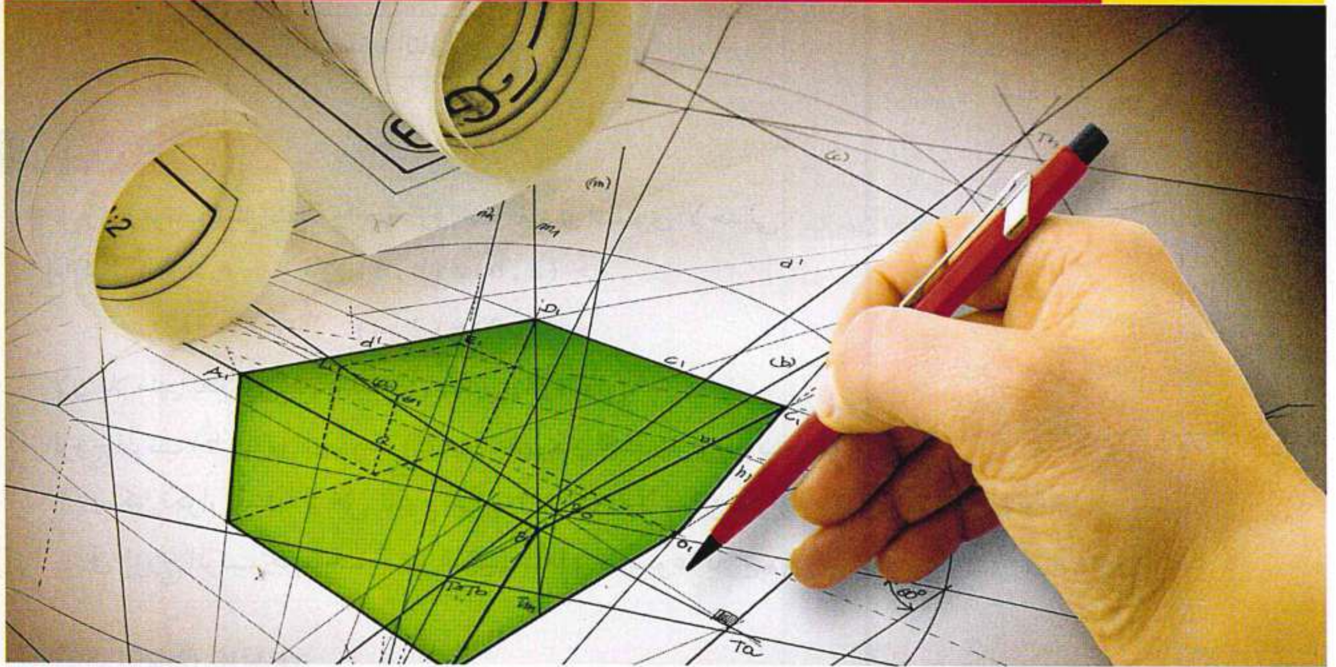
- التواصل الرياضى.
- التفكير الإبداعى.
- التفكير الناقد.
- التنمية المستدامة .

القيم:

- التذوق الفنى.
- العمل الجماعى.
- احترام الآخر.
- الادخار.
- الوعى الحضارى.

ذاكر — الدرس 1

حاصل الضرب الديكارتى
(Cartesian Product)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب مفهوم الزوج المرتب.
- يتعرف الطالب شروط تساوى زوجين مرتبين.
- يتعرف الطالب مفهوم حاصل الضرب الديكارتى.
- يمثل الطالب حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين بالمخطط السهمى والمخطط الديكارتى.
- يستخدم الطالب حاصل الضرب الديكارتى لحل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- الزوج المرتب (Ordered Pair)
- المسقط الأول (First Projection)
- المسقط الثانى (Second Projection)
- حاصل الضرب الديكارتى (Cartesian Product)
- المخطط السهمى (Arrow Diagram)
- المخطط الديكارتى (Cartesian Diagram)



فكر وناقش

- **الجدول المقابل**، يوضح أن أحد المطاعم يقدم وجبات الغذاء، بحيث تتكون كل وجبة من طبق رئيسى ونوع من المقبِّلات.

ما الإمكانات المختلفة لاختيار إحدى الوجبات؟

الطبق الرئيسى	المقبِّلات
لحوم	سلطة
دجاج	شوربة
أسماك	



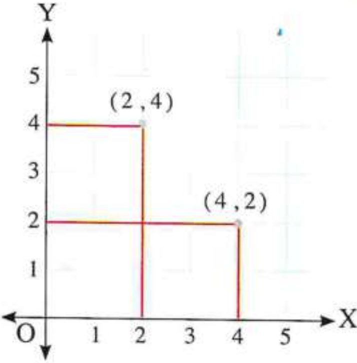
- فى هذا الدرس، سوف نتعلم مفهوم الزوج المرتب، وحاصل الضرب الديكارتى وكيفية تمثيله، مما سيمكِّنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم 1 الزوج المرتب

- (a , b) يُسمى زوجًا مرتبًا ،

(a , b)

المسقط الأول — المسقط الثانى



نقاط هامة

- كل زوج مرتب يمثَّل بنقطة واحدة، وواحدة فقط فى المستوى الإحداثى.
- إذا كان: $a \neq b$ ◄ فإن: $(a , b) \neq (b , a)$ ◄

فمثلًا: $(4 , 2) \neq (2 , 4)$ ◄

لأن كلًّا منهما يعبر عن نقطة مختلفة فى المستوى الإحداثى.

- الزوج المرتب (a , b) والمجموعة $\{a , b\}$ **مفهومان مختلفان ويوجد بينهما فروق وهى:**

1 **يمكن** تكرار المسقط داخل الزوج المرتب (a , a) ، **ولا يمكن** تكرار العنصر داخل المجموعة.

2 فى الزوج المرتب **يجب الحفاظ على الترتيب**، أما فى المجموعة **فلا يهم الترتيب** $\{b , a\} = \{a , b\}$ ◄

تساوى زوجين مرتبين:

- إذا كان: $(x , y) = (a , b)$ ◄ فإن: $y = b$ ، $x = a$

فمثلًا: إذا كان: $(x , y) = (5 , 1)$ ◄ فإن: $y = 1$ ، $x = 5$

مثال 1 أوجد قيم المتغيرات فى كل مما يأتى:

1 $(2x , -3y) = (8 , 6)$

2 $(2a + 1 , 8) = (7 , \frac{1}{2}b)$

3 $(x^2 + 1 , \sqrt[3]{y}) = (5 , -2)$

4 $(a - 2 , 3) = (5 , a + b)$

الحـل

1 $\because (2x , -3y) = (8 , 6)$

$\therefore -3y = 6$

$\therefore y = \frac{6}{-3} = -2$

$\therefore 2x = 8$

$\therefore x = \frac{8}{2} = 4$

2 $\because (2a + 1 , 8) = (7 , \frac{1}{2}b)$

$\therefore \frac{1}{2}b = 8$

$\therefore b = 2 \times 8$

$\therefore b = 16$

$\therefore 2a + 1 = 7$

$\therefore 2a = 7 - 1 = 6$

$\therefore a = \frac{6}{2} = 3$

3 $\because (x^2 + 1 , \sqrt[3]{y}) = (5 , -2)$

$\therefore \sqrt[3]{y} = -2$

$\therefore y = (-2)^3 = -8$

$\therefore x^2 + 1 = 5$

$\therefore x^2 = 5 - 1 = 4$

$\therefore x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

4 $\because (a - 2 , 3) = (5 , a + b)$

$\therefore a + b = 3$

$\therefore 7 + b = 3$

$\therefore b = 3 - 7$

$\therefore b = -4$

$\therefore a - 2 = 5$

$\therefore a = 5 + 2$

$\therefore a = 7$

س؟ سؤال 1 أوجد قيمة x ، y فى كل مما يأتى:

1 $(x - 2 , 3) = (5 , y + 1)$

2 $(x^3 + 1 , 15) = (-7 , y^2 - 1)$

3 $(|x| , y^5) = (1 , 32)$

4 $(x + 3 , xy) = (5 , -8)$

تعلم 2 حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

- إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين فإن:

1 حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة X فى المجموعة Y هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من X ومسقطها الثانى عنصر من Y ،

ويُرمز له بالرمز : $X \times Y$ ، وتقرأ « X ضرب Y »

أى أن: $X \times Y = \{(a, b) : a \in X \ , \ b \in Y\}$

2 حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة Y فى المجموعة X هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من Y ومسقطها الثانى عنصر من X ،

ويُرمز له بالرمز : $Y \times X$ ، وتقرأ « Y ضرب X »

أى أن: $Y \times X = \{(c, d) : c \in Y \ , \ d \in X\}$

- يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى بطريقتين: (أ) المخطط السهمى. (ب) المخطط الديكارتى.

تاريخ الرياضيات

تُسمى حاصل الضرب الديكارتى بهذا الاسم نسبة إلى العالم الفرنسى رينيه ديكارت (Renè Descartes) مؤسس علم الهندسة التحليلية، وهى التى ربطت الجبر والهندسة باستخدام الإحداثيات.

مثال 2

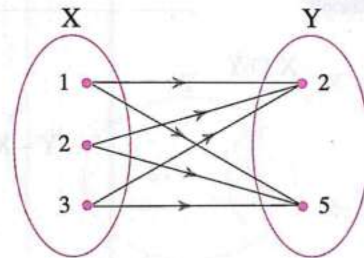
إذا كانت: $X = \{1, 2, 3\}$ ، $Y = \{2, 5\}$

1 أوجد: $X \times Y$ ومثّله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

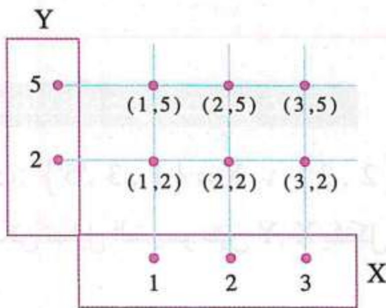
2 أوجد: $Y \times X$ ومثّله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

الحل

1 $X \times Y = \{1, 2, 3\} \times \{2, 5\} = \{(1,2), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,5)\}$

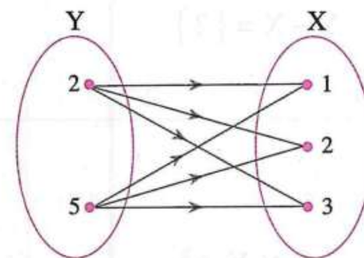


المخطط السهمى

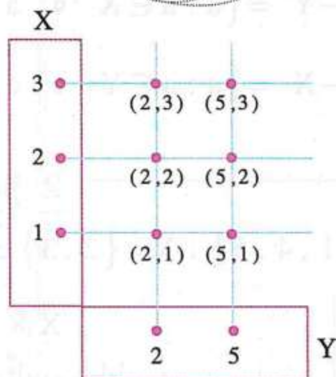


المخطط الديكارتى

2 $Y \times X = \{2, 5\} \times \{1, 2, 3\} = \{(2,1), (2,2), (2,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$



المخطط السهمى



المخطط الديكارتى



نقاط هامة



لأى مجموعتين غير خاليتين X ، Y

- إذا كان: $X \neq Y$ فإن: $X \times Y \neq Y \times X$
- إذا كان: $X = Y$ فإن: $X \times Y = Y \times X$
- إذا كانت: $\varnothing$ هى المجموعة الخالية فإن: $X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$

مثال 3

إذا كانت $X = \{3 , 7\}$ ، $Y = \{a , b , c\}$ فأوجد كلًا من:

1 $X \times Y$ **2** $Y \times X$ **3** $X \times \varnothing$

الحل

1 $X \times Y = \{3 , 7\} \times \{a , b , c\}$

$= \{(3,a) , (3,b) , (3,c) , (7,a) , (7,b) , (7,c)\}$

2 $Y \times X = \{a , b , c\} \times \{3 , 7\}$

$= \{(a,3) , (a,7) , (b,3) , (b,7) , (c,3) , (c,7)\}$

3 $X \times \varnothing = \varnothing$

لاحظ أن

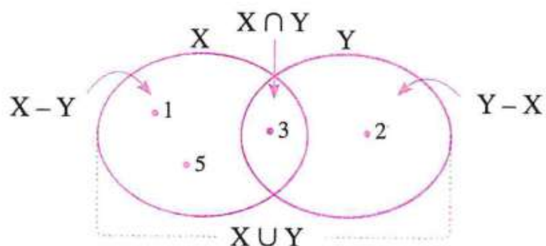
$X \times Y \neq Y \times X$



تذكر: العمليات على المجموعات:

إذا كانت: $X = \{1 , 3 , 5\}$ ، $Y = \{2 , 3\}$

فإنه : يمكن تمثيل المجموعتين X ,Y بشكل ڤن المقابل:



- $X \cap Y = \{a : a \in X$ و $a \in Y\}$ ←— **1** $X \cap Y = \{3\}$
- $X \cup Y = \{a : a \in X$ أو $a \in Y\}$ ←— **2** $X \cup Y = \{1 , 2 , 3 , 5\}$
- $X - Y = \{a : a \in X$ و $a \notin Y\}$ ←— **3** $X - Y = \{1 , 5\}$
- $Y - X = \{a : a \in Y$ و $a \notin X\}$ ←— **4** $Y - X = \{2\}$

س؟ سؤال 2

إذا كانت $X = \{2 , 3\}$ ، $Y = \{1 , 4 , 5\}$ فأوجد كلًا من:

1 $X \times Y$ ومثّله بمخطط سهمى.

2 $Y \times X$ ومثّله بمخطط ديكارتى.

3 $\varnothing \times Y$

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة فى نفسها

- إذا كانت X مجموعة غير خالية، فإن: $X \times X = \{(a, b) : a \in X \,,\, b \in X\}$

وتكتب أحيانًا X^2 ، وتقرأ « X اثنين »

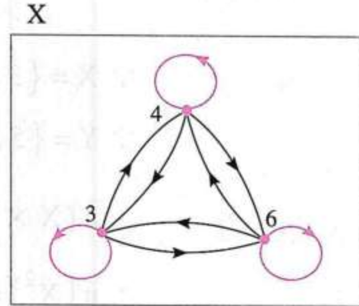
مثال 4

إذا كانت $X = \{3 , 4 , 6\}$ ، فأوجد $X \times X$ ومثِّله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

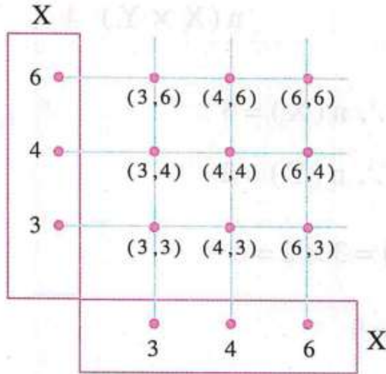
الحل

$X \times X = X^2 = \{3 , 4 , 6\} \times \{3 , 4 , 6\}$

$= \{(3,3) , (3,4) , (3,6) , (4,3) , (4,4) , (4,6) , (6,3) , (6,4) , (6,6)\}$



المخطط السهمى



المخطط الديكارتى

مثال 5

إذا كانت: $X = \{5\}$ ، $Y = \{2 , 3\}$ ، $Z = \{2 , 4 , 5\}$ أوجد كلًا مما يأتى:

1 $Y \times (Y \cup Z)$ 2 $(X \cap Z) \times (Y \cap Z)$ 3 $(Z - Y) \times (Z - X)$

الحل

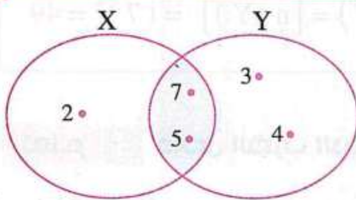
1 $Y \times (Y \cup Z) = \{2 , 3\} \times \{2 , 3 , 4 , 5\} = \{(2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5)\}$

2 $(X \cap Z) \times (Y \cap Z) = \{5\} \times \{2\} = \{(5,2)\}$

3 $(Z - Y) \times (Z - X) = \{4 , 5\} \times \{2 , 4\} = \{(4,2) , (4,4) , (5,2) , (5,4)\}$

مثال 6

يمثل الشكل المقابل شكل ڤن للمجموعتين X ، Y أوجد:



1 $(X - Y) \times (Y - X)$ 2 $X \times (X \cap Y)$

الحل

1 $(X - Y) \times (Y - X) = \{2\} \times \{3 , 4\} = \{(2,3) , (2,4)\}$

2 $X \times (X \cap Y) = \{2 , 5 , 7\} \times \{7 , 5\} = \{(2,7) , (2,5) , (5,7) , (5,5) , (7,7) , (7,5)\}$

سؤال 3

1 إذا كانت $X = \{1 , 2 , 5\}$ ، $Y = \{2 , 4\}$ فأوجد كلًا من:

(أ) $X \times Y$ (ب) $Y \times X$ (جـ) X^2 (د) Y^2

مع التمثيل بمخطط سهمى لكل مما سبق.

2 إذا كان $X - Y = \{3\}$ ، $Y - X = \{1 , 6\}$ ، $X \cap Y = \{5\}$ فارسم شكل ڤن للمجموعتين، ثم أوجد:

(أ) X , Y (ب) $X \times (X \cap Y)$

عدد عناصر حاصل الضرب الديكارتى:

إذا رمزنا لعدد عناصر المجموعة X بالرمز $n(X)$ ، عدد عناصر المجموعة Y بالرمز $n(Y)$ فإن:

1 $n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$ ، 2 $n(X^2) = [n(X)]^2$

3 $n(X \times \varnothing) = n(\varnothing \times X) = n(\varnothing) = 0$

مثال 7

إذا كانت: $X = \{3, 4, 5\}$ ، $Y = \{5, 6\}$ فأوجد كلًا من:

1 $n(X \times Y)$ 2 $n(X^2)$ 3 $n(Y^2)$

الحل

$\because X = \{3, 4, 5\}$ $\therefore n(X) = 3$

$\because Y = \{5, 6\}$ $\therefore n(Y) = 2$

1 $\therefore n(X \times Y) = n(X) \times n(Y) = 3 \times 2 = 6$

2 $\therefore n(X^2) = [n(X)]^2 = (3)^2 = 9$

3 $\therefore n(Y^2) = [n(Y)]^2 = (2)^2 = 4$

مثال 8

إذا كانت: $X = \{1, 2, 3\}$ ، $n(X \times Y) = 21$ فأوجد: $n(Y^2)$

الحل

$\because X = \{1, 2, 3\}$ $\therefore n(X) = 3$

$\because n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$

$21 = 3 \times n(Y)$

$\therefore n(Y) = \frac{21}{3} = 7$ $\therefore n(Y^2) = [n(Y)]^2 = (7)^2 = 49$

تعلم 3 حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين:

إذا كانت X مجموعة غير منتهية، فإن: $X \times X$ تكون أيضًا مجموعة غير منتهية:

ومن أمثلة ذلك ما يأتى:

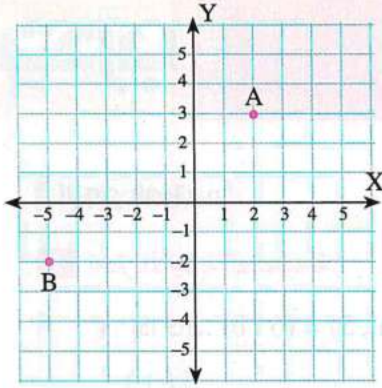
1 $N \times N = \{(x, y) : x \in N , y \in N\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

2 $Z \times Z = \{(x, y) : x \in Z , y \in Z\}$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

3 $Q \times Q = \{(x, y) : x \in Q , y \in Q\}$ حيث Q مجموعة الأعداد النسبية.

4 $R \times R = \{(x, y) : x \in R , y \in R\}$ حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

فمثلًا: الشكل المقابل يمثل جزءًا صغيرًا من الشبكة التربيعية المتعامدة لحاصل الضرب الديكارتى $Z \times Z$



وكل نقطة من نقاط التقاطع تمثل أحد الأزواج المرتبة فى $Z \times Z$ حيث:

$B(-5, -2) \in Z \times Z$ ، $A(2, 3) \in Z \times Z$

مثال 9

إلى أى من حواصل الضرب الديكارتية $N \times N$ ، $Z \times Z$ ، $Q \times Q$ ، $R \times R$ ينتمى كل من الأزواج المرتبة التالية. (اكتب جميع حواصل الضرب الممكنة)

1 $(\sqrt{4}, 5)$ 2 $(\sqrt[3]{-8}, 3)$ 3 $(2\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ 4 $(\sqrt{5}, 1)$

الحل

1 $\because (\sqrt{4}, 5) = (2, 5)$

$\therefore (\sqrt{4}, 5) \in N \times N$ ، $(\sqrt{4}, 5) \in Z \times Z$ ، $(\sqrt{4}, 5) \in Q \times Q$ ، $(\sqrt{4}, 5) \in R \times R$

2 $\because (\sqrt[3]{-8}, 3) = (-2, 3)$

$\therefore (\sqrt[3]{-8}, 3) \in Z \times Z$ ، $(\sqrt[3]{-8}, 3) \in Q \times Q$ ، $(\sqrt[3]{-8}, 3) \in R \times R$

3 $\because (2\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{3})$

$\therefore (2\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in Q \times Q$ ، $(2\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in R \times R$

4 $\therefore (\sqrt{5}, 1) \in R \times R$

سؤال 4

1 **اختر الإجابة الصحيحة:**

(أ) إذا كان: $(9, 4) \in \{9, 7\} \times \{a, 5\}$ فإن $a = $ ....

(أ) 9 (ب) 4 (جـ) 7 (د) 5

(ب) إذا كان: $X = \{3\}$ فإن $n(X^2) = $ ....

(أ) 1 (ب) 9 (جـ) $(3, 3)$ (د) 3

(جـ) إذا كان: $n(X) = 2$ ، $Y = \{5\}$ فإن $n(X \times Y) = $ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 5 (د) 10

(د) إذا كانت $X \times Y = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}$ فإن $n(X) + n(Y^2) = $ ....

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 9 (د) 10

2 إلى أى من حواصل الضرب الديكارتية $N \times N$ ، $Z \times Z$ ، $Q \times Q$ ، $R \times R$ ينتمى كل من الأزواج المرتبة التالية؟ (اكتب جميع حواصل الضرب الممكنة)

(أ) $(-\sqrt{9}, 2)$ (ب) $(\sqrt[3]{27}, 5)$ (جـ) $(3\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (د) $(5, \sqrt{7})$

أسئلة الكتاب المدرسى

الزوج المرتب:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $(a , 5) = (6 , b)$ فإن: $a + b =$ ....

(أ) 5 (ب) 11 (جـ) 6 (د) 1

2 إذا كان: $(x , y - 1) = (4 , 3)$ فإن: $\frac{x}{y} =$ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

3 إذا كان: $(x + 2 , y) = (2 , 3)$ فإن: $x^5 y + 1 =$ ....

(أ) 3 (ب) 2 (جـ) 0 (د) 1

4 إذا كان: $(a - 7 , 26) = (-3 , b^3 - 1)$ فإن: $\sqrt{a^2 + b^2} =$ ....

(أ) 5 (ب) -5 (جـ) ±5 (د) ±7

5 إذا كان: $(x - 1 , 2^y) = (1 , 8)$ فإن: $(x , y) =$ ....

(أ) $(2 , 3)$ (ب) $(3 , 2)$ (جـ) $(0 , 3)$ (د) $(0 , -3)$

6 إذا كانت: $(x - 2 , 3) = (5 , x + y)$ فإن: $x - y =$ ....

(أ) 7 (ب) 5 (جـ) -11 (د) 11

2 أوجد قيمة كل من x , y فى كل مما يأتى:

1 $(x , y) = (-5 , 9)$
2 $(6 , y - 3) = (2 - x , -1)$
3 $(5^{x-2} , xy) = (1 , 18)$
4 $(3x - 1 , 27) = (5 , y^3)$
5 $(3x^2 , \frac{y^3}{2}) = (12 , -32)$
6 $(\sqrt{x} , \frac{y^2}{5}) = (3 , 4)$

3 إذا كان: $(2a - 3 , 4) = (4a , b + 5)$ **فأوجد قيمة:** $|2a - b|$

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين ومجموعتين غير منتهيتين:

4 اختر الإجابة الصحيحة:

1 $\{3\} \times \{5\} =$ ....

(أ) $\{15\}$ (ب) $\{3 , 5\}$ (جـ) $(3 , 5)$ (د) $\{(3 , 5)\}$

2 إذا كانت: $X = \{a , b , c\}$, $Y = \{2 , 3 , 5\}$ فإن: $Y \times X$ .... $(a , 5)$

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

3 إذا كانت: $X = \{3 , 5\}$, $Y = \{6 , 7\}$ فإن: $(6 , 7) \in$ ....

(أ) $X \times Y$ (ب) $Y \times X$ (جـ) X^2 (د) Y^2

4 إذا كانت: $X = \{3, 2\}$ فإن: $\varnothing \times X = $ ....

(أ) $\varnothing$ (ب) X (جـ) $(3, 2)$ (د) $\{0\}$

5 إذا كانت: X, Y مجموعتين غير خاليتين وكان: $X \times Y = Y \times X$ فإن: ....

(أ) $X \neq Y$ (ب) $X = Y$ (جـ) $X \not\subset Y$ (د) $Y \not\subset X$

6 إذا كان: $X \times Y = \{(a, 5), (4, 7), (9, b), (9, 5)\}$ فإن: $X = $ ....

(أ) $\{7, 9\}$ (ب) $\{4, 7\}$ (جـ) $\{4, 9\}$ (د) $\{5, 9\}$

7 إذا كان: $X^2 = \{(4, 9), (a, a), (b, a), (b, b)\}$ فإن: $X = $ ....

(أ) $\{2, 3\}$ (ب) $\{4, 9\}$ (جـ) $\{4\}$ (د) $\{9\}$

8 إذا كان: $\{2\} \times \{a, b\} = \{(2, 4), (2, 3)\}$ فإن: $a - b = $ ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) ± 1 (د) 0

9 إذا كانت: $X = \{4, 5\}, Y = \{3, 4\}, Z = \{1\}$ فإن: $(X \cap Y) \times Z = $ ....

(أ) $\{1, 4\}$ (ب) $\{(1, 4)\}$ (جـ) $\{(4, 1)\}$ (د) $\varnothing$

10 إذا كانت: $X = \{4, 7\}, Y = \{5\}, Z = \{4, 8\}$ فإن: $Y \times (Z - X) = $ ....

(أ) $\{(5, 7)\}$ (ب) $\{(7, 5)\}$ (جـ) $\{(5, 4)\}$ (د) $\{(5, 8)\}$

11 إذا كان: $n(X) = 3, Y = \{3\}$ فإن: $n(X \times Y) = $ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 9

12 إذا كانت: $X = \{5, 6, 7\}$ فإن: $n(X^2) = $ ....

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

13 إذا كانت: $X = \{4, 7, 9\}$ وكان: $n(X \times Y) = 6$ فإن: $n(Y^2) = $ ....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

14 إذا كانت: $n(X \times Y) = 12, n(X^2) = 9$ فإن: $n(Y^2) = $ ....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 16

15 إذا كان: $X \times Y = \{(1, 4), (1, 7), (1, 8)\}$ فإن: $n(Y^2) = $ ....

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 6 (د) 9

16 إذا كانت: $X = \{2, 3, 4, 7, 8\}, Y = \{1, 4, 5, 6\}$ فإن: $n(X^2) - n(Y \times X) = $ ....

(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 15 (د) 25

17 إذا كان: $n(X) = n(X \times Y)$ فإن: $n(Y) = $ ....

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

18 إذا كان: X, Y مجموعتين بحيث: $n(X \times Y) = 11$ ، فإن: $n(X) + n(Y) = $ ....

(أ) 8 (ب) 9 (جـ) 11 (د) 12

19 إذا كانت: $(X - Y) \times Y = \{(1, 2), (1, 3)\}$ ، $n(X \times Y) = 6$ فإن: .... $X =$

(أ) $\{1\}$ (ب) $\{1, 2\}$ (جـ) $\{1, 3, 6\}$ (د) $\{1, 2, 3\}$

20 إلى أى حاصل ضرب ديكارتى مما يلى تنتمى النقطة $(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ ؟ ....

(أ) $N \times N$ (ب) $Z \times Z$ (جـ) $Q \times Q$ (د) $R \times R$

21 النقطة $(5, -2)$، لا تنتمى إلى حاصل الضرب الديكارتى ....

(أ) $N \times N$ (ب) $Z \times Z$ (جـ) $Q \times Q$ (د) $R \times R$

5 إذا كانت: $X = \{3, 2\}$ ، $Y = \{2, 4\}$ ، فأوجد **كلًا** مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى:

1 $X \times Y$ 2 $Y \times X$

3 X^2 4 Y^2

6 إذا كانت: $X = \{1, 2, 3\}$ ، $Y = \{a, b\}$ ، فأوجد **كلًا** مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى:

1 $X \times Y$ 2 $Y \times X$

3 X^2 4 Y^2

7 إذا كانت: $X \times Y = \{(2, 2), (2, 5), (2, 7)\}$ فأوجد:

1 Y 2 X^2

8 1 إذا كانت: $X = \{2, 7\}$ ، فأوجد: X^2 ومثله بمخطط سهمى.

2 إذا كانت: $X = \{a, b, c\}$ ، فأوجد: $X \times X$ ومثله بمخطط ديكارتى.

9 إذا كانت: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{2, 3\}$ ، $Z = \{7, 2\}$ فأوجد

1 $(X \cap Y) \times Z$ 2 $(Z - Y) \times X$

10 إذا كانت: $X = \{6, 4, 8\}$ ، $Y = \{3, 4, 5\}$ ، فأوجد **كلًا** مما يأتى ومثله بمخطط سهمى وآخر ديكارتى:

1 $(X \cap Y) \times Y$ 2 $(X - Y) \times Y$

3 $(Y - X) \times X$

11 إذا كان: $X \times Y = \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ ، فأوجد **كلًا** من:

1 X , Y 2 $(X \cap Y) \times Y$

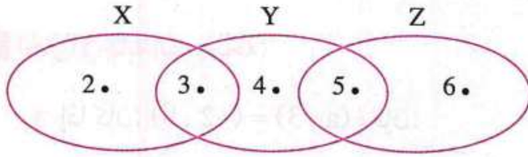
12 إذا كان: $X \times Y = \{(3, 3), (4, 3), (3, 7), (4, 7), (3, 8), (4, 8)\}$ فأوجد كلًا مما يأتى:

1 X , Y 2 $Y \times (X \cap Y)$

3 $(X - Y) \times (Y - X)$ 4 $(X \cup Y) \times (X \cap Y)$

5 $n(Y^2)$ 6 $n(X^2)$

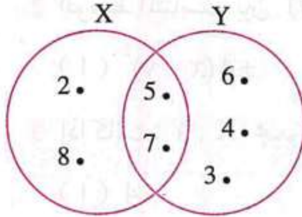
13 يمثل الشكل المقابل شكل ڤن للمجموعات Z , Y , X أوجد:



1 $X \times (Y \cap Z)$

2 $(X \cup Y) \times (Y - Z)$

14 يمثل الشكل المقابل شكل ڤن للمجموعات Y , X



أوجد:

$(X - Y) \times (Y - X)$

15 إذا كانت: $X - Y = \{3\} , Y - X = \{1 , 5\} , X \cap Y = \{6\}$ ، فارسم شكل ڤن للمجموعات X , Y.

ثم أوجد:

1 X , Y 2 $(X \cap Y) \times X$

16 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3 , ... , 10\}$. اختير زوج مرتب عشوائيًّا من حاصل الضرب الديكارتى $X \times X$

فما احتمال أن ينتمى الزوج المرتب المُختار لحاصل الضرب الديكارتى $\{1 , 2 , 3\} \times \{1 , 2 , 3 , 4\}$؟

17 إلى أى من حواصل الضرب الديكارتية التالية:

$N \times N \quad , \quad Z \times Z \quad , \quad Q \times Q \quad , \quad R \times R$

ينتمى كل من الأزواج المرتبة التالية: (اكتب جميع حواصل الضرب الممكنة)

1 $(\sqrt{9} , 4)$ 2 $(\sqrt[3]{-125} , 7)$

3 $(\frac{1}{2} , 1\frac{1}{3})$ 4 $(2 , \sqrt{3})$



18 اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كان: $n(X) = K , n(X \times Y) = K + 4$ ، فإن: $n(Y)$ لا يمكن أن يساوى:

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 5

19 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3\} , Y = \{a , b , c\}$ ، فكم عدد الأزواج المرتبة $(x , y) \in X \times Y$، وتحقق أن المسقط الأول عدد فردى، والمسقط الثانى ليس b

20 إذا كان: X , Y مجموعتين غير خاليتين، حيث: $n(X \times Y) = n(X) + n(Y) , n(X \cap Y) = 1$

فأوجد: $n(X \cup Y)$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $(a , 3) = (-2 , b)$ ، فإن: .... $= a + b$

(أ) -5 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 5

2 الوسط المتناسب بين $3(x+y)^2$, $12(x-y)^2$ هو ....

(أ) $\pm 4(x-y)^2$ (ب) $\pm 6(x-y)^2$ (جـ) $\pm 6(x^2-y^2)$ (د) $\pm 6(x-y)$

3 إذا كانت: X , Y مجموعتين غير خاليتين، وكان: $n(X^2) = 4$ ، $n(X \times Y) = 6$ فإن: .... $= n(Y^2)$

(أ) 4 (ب) 9 (جـ) 16 (د) 12

4 إلى أى حاصل ضرب ديكارتى مما يلى تنتمى إليه النقطة $(-2 , \sqrt[3]{7})$ ؟

(أ) $N \times N$ (ب) $Z \times Z$ (جـ) $Q \times Q$ (د) $R \times R$

5 .... $= \{2\} \times \{7\}$

(أ) $\{14\}$ (ب) $\{2 , 7\}$ (جـ) $\{(2 , 7)\}$ (د) $(2 , 7)$

6 إذا كانت: $X \times Y = \{(1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4)\}$ ، فإن: .... $= n(X) + n(Y^2)$

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 9 (د) 10

2 أكمل ما يأتى:

1 إذا كانت: $\left(\frac{a^3}{2} , b+1\right) = (4 , 3)$ ، فإن .... $= \sqrt[3]{a+3b}$

2 إذا كان: $(2 , 4) \in \{2 , 6\} \times \{a , 5\}$ ، فإن: .... $= a$

3 إذا كانت: $X \times Y = \{(1 , 3) , (1 , 4) , (2 , 3) , (2 , 4)\}$ فإن: .... $= X \cap Y$

3 أجب عما يأتى:

1 إذا كانت: $X = \{3 , 4\}$, $Y = \{2 , 5 , 7\}$ ، **فأوجد:**

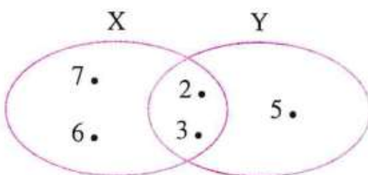
(أ) $X \times Y$ (ب) X^2 (جـ) $n(Y^2)$

ومثل كلًّا منها بمخطط سهمى وآخر ديكارتى.

2 إذا كانت: $X = \{1 , 2\}$, $Y = \{2 , 5\}$, $Z = \{4 , 5\}$ ، **فأوجد:**

(أ) $n(X \times Y)$ (ب) $(Y \cap Z) \times X$

3 من شكل ڤن المقابل ، **أوجد** كلًّا من:



(أ) $(X \cap Y) \times Y$

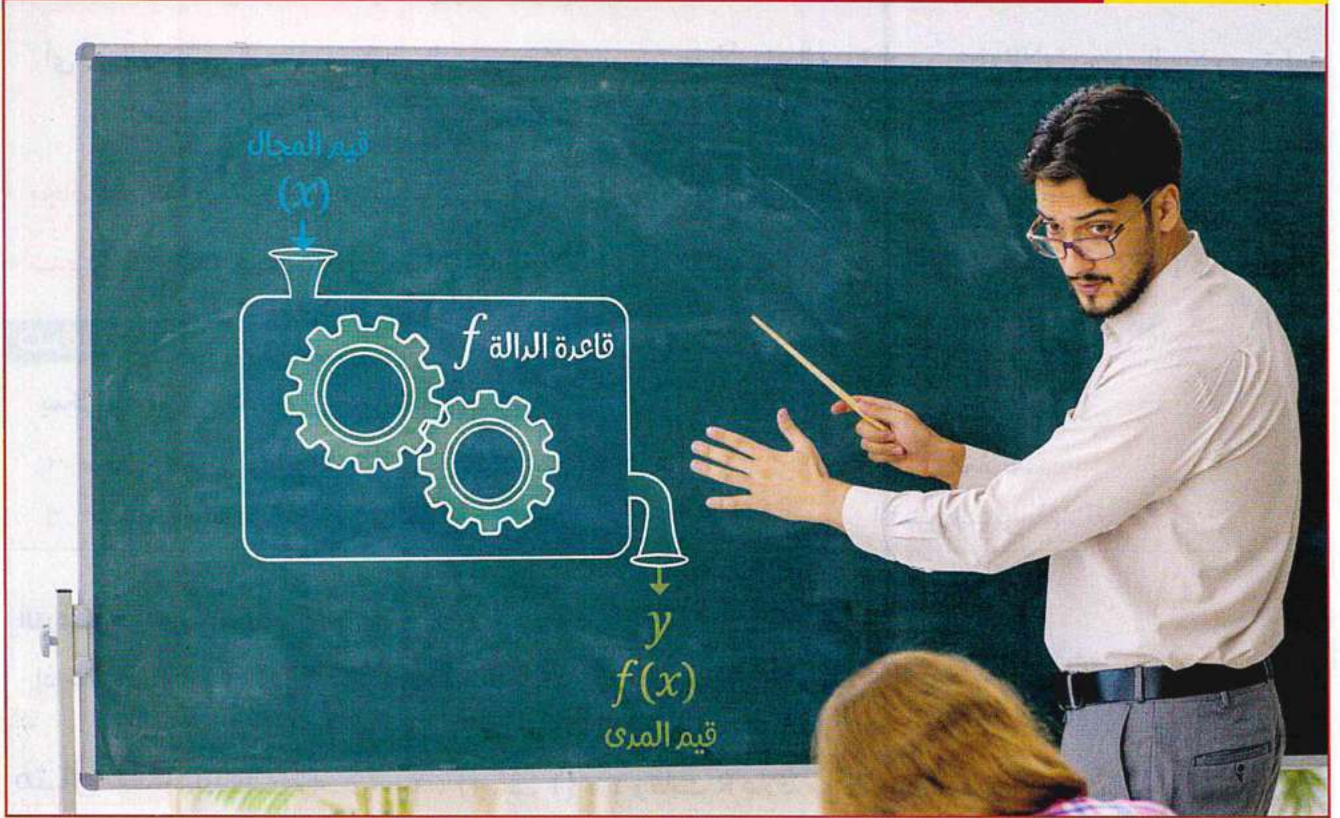
(ب) $(Y - X) \times (X - Y)$

4 إذا كان: $X \times Y = \{(3 , 5) , (3 , 1) , (6 , 1) , (6 , 5)\}$ ، **فأوجد كلًّا من:**

(أ) X , Y (ب) $Y \times X$ (جـ) Y^2 (د) $Y \times \varnothing$

ذاكر | الدرس 2

العلاقة والدالــة
(Relation and Function)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب مفهوم العلاقة.
- يُعبر الطالب عن العلاقة بطرق مختلفة.
- يتعرف الطالب مجال العلاقة ومدى العلاقة.
- يتعرف الطالب مفهوم الدالة.
- يحدد الطالب متى تكون العلاقة دالة.
- يعرف الطالب مفهوم مجال الدالة ومجالها المقابل ومداها.
- يُمثل الطالب الدالة بطرق مختلفة.
- يُعبر الطالب عن الدالة بطريقة رمزية.

مفـردات أسـاسـية

- العلاقة (**Relation**)
- جدول العلاقة (**Relation Table**)
- الـدالــة (**Function**)
- المجال (**Domain**)
- المخطط السهمى (**Arrow Diagram**)
- المدى (**Range**)
- التمثيل البيانى (**Graph**)
- المجال المقابل (**Codomain**)

فكر وناقش

- إذا كانت : $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{2 , 6 , 8\}$ فأوجـد حاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$.

هل يمكنك تحديد الأزواج المرتبة (a , b) التى تنتمى لحاصل الضرب الديكارتى $X \times Y$ ؟ وتحقق أن $a = \frac{1}{2} b$ **ناقش ذلك.**

- **فى هذا الدرس، سوف نتعلم مفهوم العلاقة والدالة، وكيفية التعبير عنهما بطرق مختلـفة وسوف نحدد متى تكون العلاقة دالة مما سيمكِّنك من حل مثل هذه المشكلات.**

تعلم 1 العلاقـــة:

- إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين، فإن العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى X × Y وسوف نرمز لها بالرمز R أى أن: $R \subset X \times Y$

أى أن: العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y هى مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول ينتمى إلى X ومسقطها الثانى ينتمى إلى Y ويعطى لبعض العلاقات قاعدة تربط بعض أو كل عناصر X ببعض أو كل عناصر Y.

- **مجال العلاقـة:** هو مجموعة كل المساقط الأولى للأزواج المرتبة فى العلاقة. أى أن: مجال $R = \{a : (a , b) \in R\}$
- **مـدى العلاقـة:** هو مجموعة كل المساقط الثانية للأزواج المرتبة فى العلاقة. أى أن: مـــدى $R = \{b : (a , b) \in R\}$

طرق التعبير عن العلاقـة:

يمكن التعبير عن العلاقة بإحدى الطرق التالية:

1. مجموعة من الأزواج المرتبة وتسمى بيان العلاقة.
2. جدول العلاقة.
3. المخطط السهمى للعلاقة.
4. التمثيل البيانى للعلاقة.

الترميـز فى الرياضـيات:

إذا كان $(x , y) \in R$ لكل $x \in X$ ، $y \in Y$ فإننا نعبر عن ذلك بالرموز كالتالى: $x\,R\,y$

مثـال 1

إذا كانت $X = \{2 , 4\}$ ، $Y = \{1 , 2 , 4\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x\,R\,y$ تعنى أن: "$x > y$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

1. اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.
2. اذكر مجال ومدى العلاقة.
3. مثل العلاقة بالمخطط السهمى.
4. مثل العلاقة بيانيًّا.

الحـل

1

$\therefore (4 , 1) \in R$ $\because 4 > 1$ ، $\therefore (2 , 1) \in R$ $\because 2 > 1$

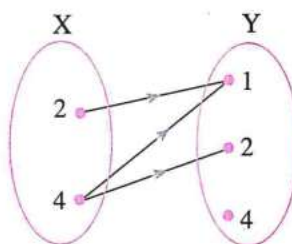
$\therefore (4 , 2) \in R$ $\because 4 > 2$ ، $\therefore (2 , 2) \notin R$ $\because 2 \ngtr 2$

$\therefore (4 , 4) \notin R$ $\because 4 \ngtr 4$ ، $\therefore (2 , 4) \notin R$ $\because 2 \ngtr 4$

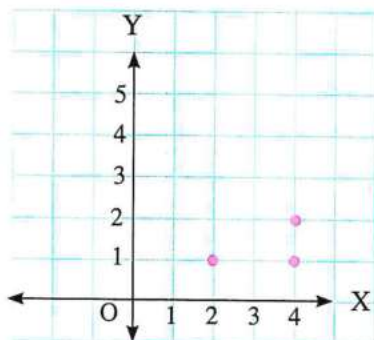
$$R = \{(2 , 1) , (4 , 1) , (4 , 2)\}$$

2 المجال هو $\{2 , 4\}$ والمدى هو $\{1 , 2\}$

3



4



العلاقة من مجموعة إلى نفسها:

إذا كانت العلاقة R من X إلى X فإننا نقول: إن R علاقة على X وتكون بالتالى $R \subset X \times X$

مثال 2

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 5 , 8\}$ ، وكانت R علاقة على X حيث $x \, R \, y$ تعنى "$x - y$ عددًا زوجيًا موجبًا" لكل $x \in X$ ، $y \in X$:

1 اكتب العلاقة R كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اذكر مجال ومدى العلاقة.

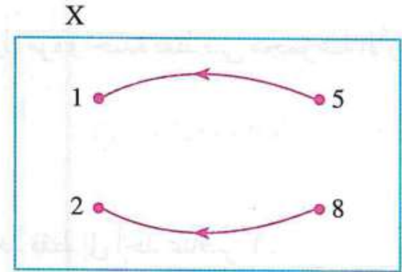
3 مثل العلاقة بالمخطط السهمى. 4 مثل العلاقة بيانيًا.

الحل

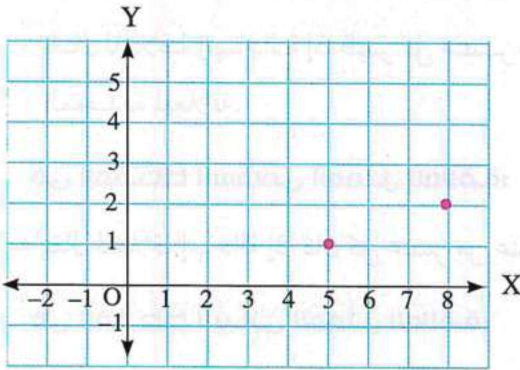
1 $R = \{(5 , 1) , (8 , 2)\}$

2 المجال هو $\{5 , 8\}$ ، المدى هو $\{1 , 2\}$

3



4



مثال 3

إذا كانت R علاقة من X إلى Y ، وكانت $R = \{(1 , 2) , (2 , 3) , (4 , 2) , (5 , 3)\}$:

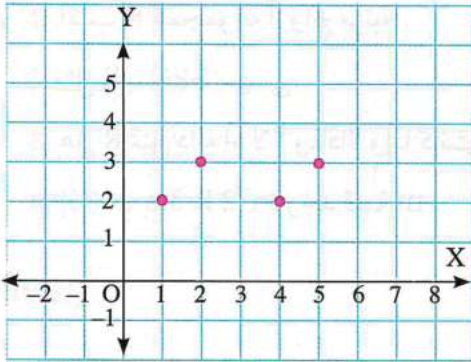
1 اكتب العلاقة فى صورة جدول. 2 مثل العلاقة بيانيًا. 3 أوجد مجال ومدى العلاقة.

الحل

1

x	1	2	4	5
y	2	3	2	3

2



3 المجال هو $\{1 , 2 , 4 , 5\}$ والمدى هو $\{2 , 3\}$

سؤال 1

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{1 , 3 , 4 , 6 , 9\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$ تعنى أن: "$x^2 = y$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اذكر مجال ومدى العلاقة.

3 مثل العلاقة بالمخطط السهمى. 4 مثل العلاقة بيانيًا.

تعلم 2 الدالــة

- لأى مجموعتين غير خاليتين X ، Y يقال للعلاقة من X إلى Y أنها دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر X بعنصر واحد فقط من عناصر Y.
- المجموعة X تسمى «مجال الدالة».
- المجموعة Y تسمى «المجال المقابل للدالة».
- مجموعة صور عناصر المجال X تسمى «مدى الدالة» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

نقاط هامة

- **ليس كل علاقة دالة، ولكن كل الدوال علاقات تحقق أنه:**

فى بيـان العلاقـة أو فى جدول العلاقة:

- يقـال للعلاقـة إنهـا دالـة إذا ظهـر كل عنصـر من عناصـر X كمسـقط أول مرة واحـدة فقط فـى مجموعـة الأزواج المرتبة المحـددة للعلاقة.

فى المخـطط السهمى الممثـل للعلاقـة:

- يقال للعلاقة إنها دالة إذا كان كل عنصر من عناصر X يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر Y.

فى المخـطط البيـانى الممثـل للعلاقـة:

- يقال للعلاقة إنها دالة إذا كان كل خط رأسى لكل عنصر من X تقع عليه نقطة واحدة فقط.

مثـال 4

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{0 , 3 , 6 , 9 , 14\}$ **وكانت R علاقة من X إلى Y حيث** $x\,R\,y$ **تعنى أن:** $"x = \frac{1}{3}y"$ **لكل من** $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

2 مثل R بمخطط سهمى.

3 هل R تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد مداها.

4 إذا كان $2\,R\,3m$ ، فأوجد قيمة m

الحـل

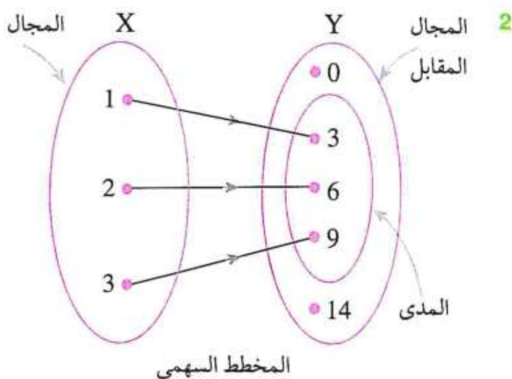
1 $R = \{(1 , 3) , (2 , 6) , (3 , 9)\}$

3 العلاقة R تمثل دالة لأن؛ كل عنصر من عناصر X خرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى Y ، المدى = $\{3 , 6 , 9\}$

4 نلاحظ من العلاقة R أن : $(2 , 6) \in R$

$\therefore 3m = 6 \qquad \therefore m = 2$

2



المخطط السهمى

مثـال 5 إذا كانت $X = \{1 , 5 , 7\}$ ، $Y = \{2 , 3 , 6\}$ ، وكانت كل من العلاقات التالية من X إلى Y

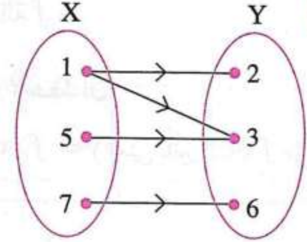
فبيِّن أيهما تُمثل دالة وأيهما لا تُمثل دالة مع ذكر السبب، وإذا كانت دالة فاكتب مداها.

1 $R = \{(1 , 3) ، (5 , 6) ، (7 , 2)\}$

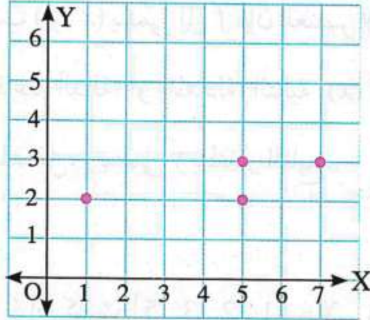
2

x	5	7
y	3	6

3



4



الحـل

1 العلاقة تمثل دالة لأن كل عنصر من X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط والمدى = $\{2 , 3 , 6\}$

2 العلاقة لا تمثل دالة لأن العنصر $1 \in X$ لم يظهر كمسقط أول فى جدول العلاقة.

3 العلاقة لا تمثل دالة لأن العنصر $1 \in X$ خرج منه أكثر من سهم.

4 العلاقة لا تمثل دالة لأن الخط الرأسى عند $5 \in X$ تقع عليه أكثر من نقطة واحدة من النقاط الممثلة للعلاقة.

مثـال 6 إذا كانت $X = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ ، وكانت R علاقة على X حيث $x \, R \, y$

تعنى: "$x = -y$" لكل $x \in X$ ، $y \in X$:

1 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

2 مثلها بمخطط سهمى.

3 مثلها بيانيًا.

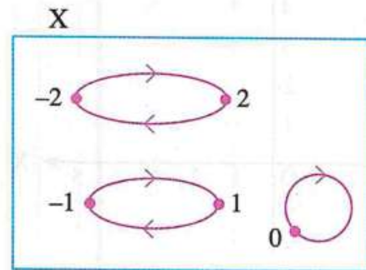
4 هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا؟

لاحظ أن
"$x = -y$"
تعنى أن x , y كل منهما معكوس جمعى للآخر.

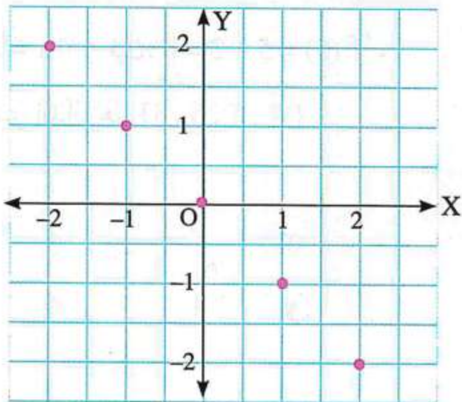
الحـل

1 $R = \{(-2 , 2) , (-1 , 1) , (0 , 0) , (1 , -1) , (2 , -2)\}$

2



3



4 العلاقة R تمثل دالة لأن كل عنصر من X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى مجموعة الأزواج المرتبة المحدد للعلاقة.

سؤال 2

إذا كانت $X = \{3 , 5 , 7\}$ ، $Y = \{6 , 9 , 10 , 16 , 21\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$

تعنى "$\frac{y}{x}$ = عددًا طبيعيًا" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

1 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.

2 مثل R بالمخطط السهمى.

3 مثل R بيانيًا.

4 هل R تمثل دالة أم لا ؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة، أوجد مجالها ومداها.

التعبير الرمزى عن الدالة:

يرمز للدالة بأحد الرموز f أو g أو ....

الدالة f من المجموعة X إلى المجموعة Y تكتب رياضيًّا:

$f : X \longrightarrow Y$ وتقرأ " f دالة من X إلى Y"

إذا كان الزوج المرتب (x , y) ينتمى إلى f فإن العنصر y هو صورة العنصر x بتأثير الدالة f ،

ونعبر عن ذلك بـ «قاعدة الدالة» أو «المعادلة» التالية $y = f(x)$

ويسمى x بالمتغير المستقل، ويسمى y بالمتغير التابع.

لاحظ أن

$y = f(x)$ تعنى تأثير الدالة f على العنصر x

مثال 7

إذا كانت $X = \{1 , 2 , 3 , 5\}$ ، $Y = \{3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 10\}$

وكانت الدالة $f : X \longrightarrow Y$ **حيث** $f(x) = x + 3$



1 **أوجد** صور عناصر X بالدالة f موضحًا مدى الدالة.

2 اكتب الدالة فى صورة جدول.

3 مثل الدالة بيانيًّا.

الحـل

1

$\because f(x) = x + 3$

عند $x = 1$ فإن: $\therefore f(1) = 1 + 3 = 4$

عند $x = 2$ فإن: $f(2) = 2 + 3 = 5$ ،

عند $x = 3$ فإن: $f(3) = 3 + 3 = 6$ ،

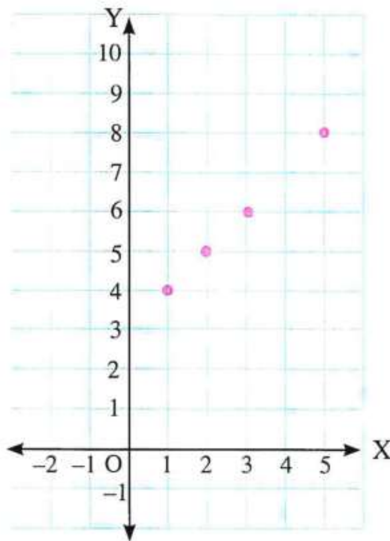
عند $x = 5$ فإن: $f(5) = 5 + 3 = 8$ ،

$\therefore$ مدى الدالة هو $\{4 , 5 , 6 , 8\}$

2

x	1	2	3	5
y	4	5	6	8

3



سؤال 3

إذا كانت $X = \{0 , 3 , 5\}$ ، $Y = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ **وكانت** $f : X \longrightarrow Y$ **حيث** $f(x) = 5 - x$

1 أوجد صور عناصر X بالدالة f موضحًا مدى الدالة.

2 اكتب الدالة فى صورة جدول.

3 مثل الدالة بيانيًّا.

مثـال 8 إذا كانت $X = \left\{-1 , 1 , 2 , \frac{1}{2}\right\}$ ، وكانت $f : X \longrightarrow X$

حيث $f(x) = x^{-1}$ لكل $x \in X$ ، $y \in X$،

فاكتب مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق الدالة f موضحًا مدى الدالة.

الحـل



$\because f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\because f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$\because f(2) = \frac{1}{2} \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 2$

$\therefore$ مجموعة الأزواج المرتبة هى: $\left\{(-1 , -1) , (1 , 1) , \left(2 , \frac{1}{2}\right) , \left(\frac{1}{2} , 2\right)\right\}$

ومدى الدالة هو: $\left\{-1 , 1 , 2 , \frac{1}{2}\right\}$

مثـال 9 إذا كانت $f(x) = -3x + 4$ فأوجد:

1 $f(-2) + f(2)$ 2 $3 f(5) + 5 f(3)$

لاحظ أن

إذا لم يذكر مجال الدالة فإننا نعتبر أن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى تجعل الدالة معرفة.

الحـل

1 $f(-2) + f(2) = [-3(-2) + 4] + [-3(2) + 4] = 10 + (-2) = 8$

2 $3 f(5) + 5 f(3) = 3[-3(5) + 4] + 5[-3(3) + 4] = 3 \times (-11) + 5 \times (-5)$

$= -33 - 25 = -58$

مثـال 10 إذا كان $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x + 5$ فما قيمة: $2 f(3) - 3 g(2)$ ؟

الحـل

$2 f(3) - 3 g(2) = 2\left((3)^2 - 1\right) - 3(2 + 5)$

$= 2(9 - 1) - 3(7) = 16 - 21 = -5$



س؟ سؤال 4

1 إذا كانت $X = \{2 , 4 , 6 , -2\}$ ، $Y = \{-3 , 5 , 7 , 9 , 13\}$ ،

وكانت f دالة من X إلى Y حيث $f(x) = 2x + 1$ ،

فاكتب مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق الدالة f موضحًا المدى.

2 إذا كانت $f(x) = 5 - x^2$ ، $g(x) = 2x$ ، فأوجد :

(أ) $f(3) + f(1)$ (ب) $2 f(1) - 3 g(1)$ (جـ) $\frac{f(2)}{g(3)}$

أسئلة الكتاب المدرسى

العلاقة:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت: R علاقة، حيث $R = \{(1 , 5) , (2 , 7) , (3 , 9)\}$، فما مجال العلاقة؟ ....

(أ) $\{1 , 2 , 3 , 5 , 7 , 9\}$ (ب) $\{1 , 2 , 3\}$ (جـ) $\{5 , 7 , 9\}$ (د) $\{1 , 5\}$

2 إذا كانت: R علاقة، حيث $R = \{(1 , 7) , (2 , 8) , (3 , 7) , (5 , 8)\}$، فما مدى العلاقة؟ ....

(أ) $\{1 , 2 , 3 , 5\}$ (ب) $\{7 , 8 , 5\}$ (جـ) $\{7 , 8\}$ (د) $\{1 , 2 , 7 , 8\}$

---

2 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ، $Y = \{4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$، وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$ تعنى "$x + y = 8$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اكتب العلاقة فى صورة جدول.

3 مثل العلاقة بالمخطط السهمى. 4 مثل العلاقة بيانيًّا. 5 اذكر مجال ومدى العلاقة.

---

3 إذا كانت: $X = \{2 , 4 , 5 , 7\}$ ، $Y = \{4 , 5 , 6 , 7 , 9\}$، وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$ تعنى "$x \leqslant y$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اذكر مجال ومدى العلاقة.

---

4 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{0 , -1 , -2 , -3\}$، وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$ تعنى "x هو المعكوس الجمعى لـ y" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 مثل العلاقة بالمخطط السهمى. 3 اذكر مجال ومدى العلاقة.

---

5 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{1 , \frac{-1}{2} , \frac{1}{3} , -2 , \frac{-1}{3}\}$، وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x \, R \, y$ تعنى "$xy = -1$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اذكر مدى العلاقة.

---

6 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y وكانت $R = \{(2 , 2) , (0 , 2) , (3 , 1) , (4 , 2)\}$

1 اكتب العلاقة فى صورة جدول. 2 مثل العلاقة بيانيًّا. 3 أوجد مجال ومدى العلاقة.

---

7 إذا كانت: $X = \{2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 9\}$ وكانت R علاقة على X حيث $x \, R \, y$ تعنى "$y = x + 1$" لكل $x \in X$ ، $y \in X$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 مثل العلاقة بالمخطط السهمى.

---

8 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 4 , 6 , 10\}$، وكانت R علاقة على X حيث $x \, R \, y$ تعنى "x مضاعف y" لكل $x \in X$ ، $y \in X$:

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة. 2 مثل العلاقة بيانيًّا .

9 إذا كانت: R علاقة على N حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية ،

وكان x R y تعنى "$xy = 18$" لكل $x \in N$ ، $y \in N$:

1 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. 2 اكتب العلاقة فى صورة جدول . 3 اكتب مجال ومدى العلاقة.

4 إذا كان 9 R m فأوجد قيمة m 5 إذا كان 6 R k فأوجد قيمة k

الدالة:

10 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت R تمثل دالة من X إلى Y فإن مجال هذه الدالة هو ....

(ا) X (ب) Y (جـ) X × Y (د) Y × X

2 إذا كانت R تمثل دالة من X إلى Y فإن Y تسمى ....

(ا) المجال (ب) المجال المقابل (جـ) المدى (د) قاعدة الدالة

3 مجموعة صور عناصر المجال بالدالة تسمى ....

(ا) المجال (ب) المجال المقابل (جـ) المدى (د) قاعدة الدالة

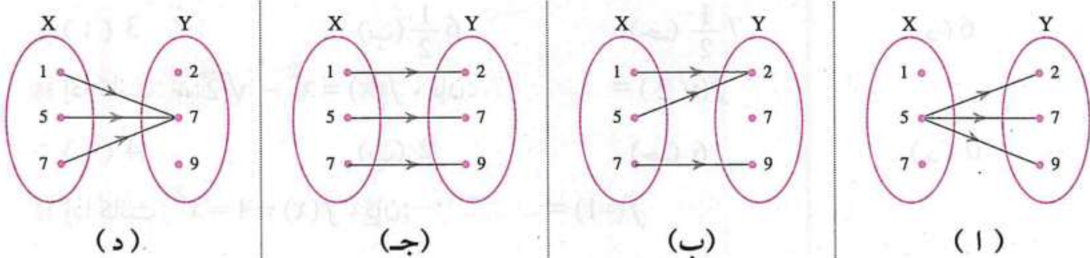
4 إذا كانت R تمثل دالة من X إلى Y فإن مدى الدالة $\subset$ ....

(ا) X (ب) Y (جـ) X^2 (د) Y × X

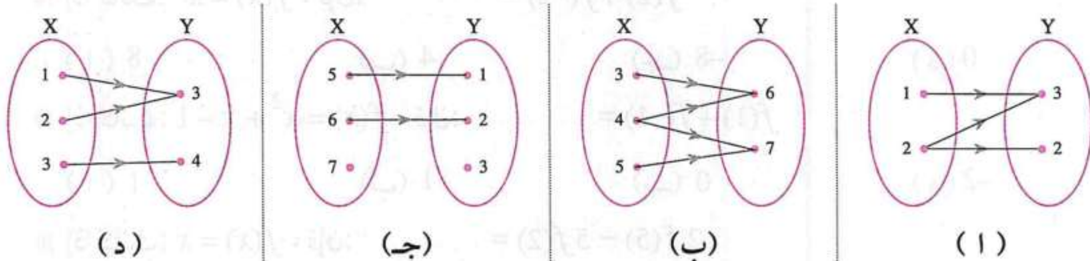
5 مجال الدالة $\{(1, 2), (2, 3), (4, 2), (5, 3)\}$ هو ....

(ا) $\{2, 3\}$ (ب) $\{1, 2, 3, 4\}$ (جـ) $\{1, 2, 4, 5\}$ (د) $\{2, 3, 4, 5\}$

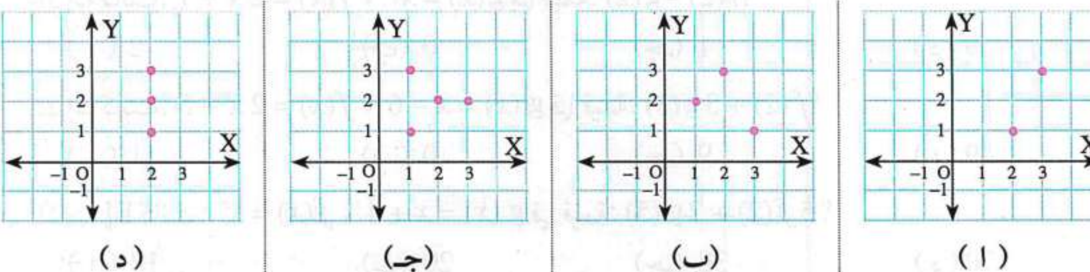
6 أى العلاقات الآتية ليست دالة من X إلى Y؟ ....



7 أى العلاقات الآتية تمثل دالة من X إلى Y ؟ ....



8 إذا كانت: $X = \{1, 2, 3\}$ ، فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة على X؟ ....



9 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 5\}$ ، $Y = \{6 , 7 , 9\}$ ، فأي من العلاقات الآتية تمثل دالة من X إلى Y؟

(أ) $\{(1 , 6) , (2 , 7) , (2 , 9) , (5 , 9)\}$ (ب) $\{(9 , 1) , (6 , 2) , (7 , 5)\}$

(جـ) $\{(1 , 7) , (5 , 9)\}$ (د) $\{(1 , 7) , (2 , 7) , (5 , 7)\}$

10 إذا كانت: $X = \{5 , 7 , 8\}$ ، $Y = \{9 , 10\}$ وكانت R دالة من X إلى Y حيث:

$R = \{(5 , 9) , (8 , 9) , (K , 9)\}$ ، فما قيمة K؟ ....

(أ) 5 (ب) 7 (جـ) 8 (د) 9

11 إذا كانت: $X = \{2 , 3 , 4\}$ وكانت R دالة على X حيث

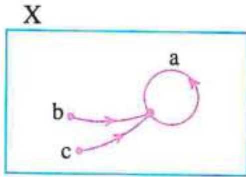
$R = \{(a , 4) , (b , 2) , (3 , 4)\}$ ، فما قيمة $a + b$؟ ....

(أ) 4 (ب) 5 (جـ) 6 (د) 7

12 إذا كانت: $R = \{(1 , 3) , (2 , 5) , (4 , 3)\}$ ، فإن R تمثل دالة مداها ....

(أ) $\{1 , 2 , 4\}$ (ب) $\{2 , 4 , 1 , 3 , 5\}$ (جـ) $\{3 , 5\}$ (د) N

13 الشكل المقابل: يمثل دالة على X مداها ....



(أ) $\{a\}$ (ب) $\{a , b , c\}$

(جـ) $\{a , b\}$ (د) $\{b , c\}$

14 إذا كانت: $f(x) = 5x - 7$ ، فإن: $f(2) =$ ....

(أ) 10 (ب) 7 (جـ) 3 (د) -3

15 إذا كانت: $f(x) = 7x - \frac{1}{2}$ ، فإن: $f(\frac{1}{2}) =$ ....

(أ) 3 (ب) $6\frac{1}{2}$ (جـ) $7\frac{1}{2}$ (د) 6

16 إذا كانت: $f(x) = x^2 - \sqrt{2}\, x$ ، فإن: $f(\sqrt{2}) =$ ....

(أ) 4 (ب) 2 (جـ) 6 (د) 0

17 إذا كانت: $f(x) = 1 - x^2$ ، فإن: $f(-1) =$ ....

(أ) 0 (ب) 2 (جـ) -1 (د) -2

18 إذا كانت: $f(x) = x^3$ ، فإن: $f(2) + f(-2) =$ ....

(أ) 8 (ب) 4 (جـ) -8 (د) 0

19 إذا كانت: $f(x) = x^2 + x - 1$ ، فإن: $f(1) + f(-1) =$ ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 0 (د) -2

20 إذا كانت: $f(x) = x$ ، فإن: $2f(5) - 5f(2) =$ ....

(أ) 10 (ب) 20 (جـ) -10 (د) 0

21 إذا كانت: $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = x^2$ فما قيمة: $f(2) - g(2)$؟

(أ) 2 (ب) 0 (جـ) 1 (د) 9

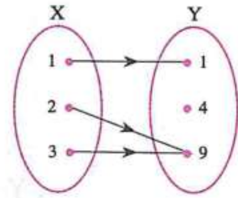
22 إذا كانت: $f(x) = 2x + 5$ ، $g(x) = x - 6$ فما قيمة: $f(2) + 3g(3)$؟

(أ) 11 (ب) 0 (جـ) 9 (د) -9

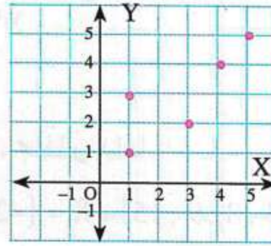
23 إذا كانت: $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x + 4$ فما قيمة: $5f(2) + 2g(5)$؟

(أ) 18 (ب) 20 (جـ) 38 (د) 70

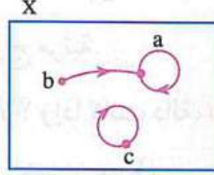
11 أى من العلاقات التالية تمثل دالة من X إلى Y؟ وأيها لا تمثل دالة، مع ذكر السبب.



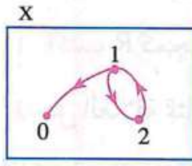
1



2



3



4

12 إذا كانت: $X = \{-1 , -2 , -3 , -4\}$ ، ولدينا العلاقات R_1 , R_2 , R_3 معرفة على X كالآتى:

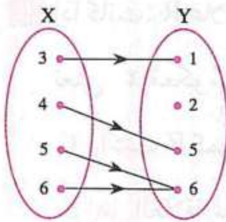
$R_1 = \{(-1 , -2) , (-2 , -3) , (-3 , -4)\}$

$R_2 = \{ (-1 , -1) , (-1 , -2) , (-1 , -3) , (-1 , -4)\}$

$R_3 = \{ (-1 , -3) , (-2 , -3) , (-3 , -3) , (-4 , -3)\}$

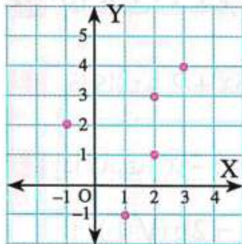
فاذكر أى العلاقات السابقة يمثل دالة؟ وأيها لا يمثل دالة؟ مع ذكر السبب.

13 المخطط السهمى المقابل يمثل العلاقة R من X إلى Y:



1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.
2 اكتب العلاقة فى صورة جدول.
3 أوجد مجال ومدى العلاقة.
4 هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

14 إذا كان الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للعلاقة R من X إلى Y حيث:



$Y = \{-1 , 1 , 2 , 3 , 4\}$ ، $X = \{-1 , 1 , 2 , 3\}$

1 اكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.
2 اكتب العلاقة فى صورة جدول.
3 مثل العلاقة بمخطط سهمى.
4 أوجد مجال ومدى العلاقة.
5 هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

15 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y ، حيث: $X = \{2 , 4 , 6\}$ ، $Y = \{1 , 2 , 3 , 5\}$ ، وكان $x \mathrm{R} y$ تعنى "$x = 2y$" لكل $x \in X , y \in Y$:

1 اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة.
2 مثل العلاقة بيانيًا.
3 أوجد مجال ومدى العلاقة.
4 هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

16 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y ، حيث: $X = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ، $Y = \{3 , 5 , 7\}$ ،
وكان $x \mathrm{R} y$ تعنى "$x + y$ عددًا أوليًا" لكل $x \in X , y \in Y$:

1 **اكتب** R كمجموعة أزواج مرتبة.
2 **مثل** العلاقة بالمخطط السهمى.
3 **أوجد** مجال ومدى العلاقة.
4 **هل** العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

17 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y ، حيث: $X = \{2 , 3 , 4 , 5\}$ ، $Y = \{3 , 5 , 6 , 7 , 9 , 11\}$ ،

وكان $x \, R \, y$ تعني "$y = 2x + 1$" لكل $x \in X$, $y \in Y$

1 **اكتب** R كمجموعة أزواج مرتبة.

2 **هل** العلاقة تمثل دالة أم لا؟ وإذا كانت دالة، **فأوجد** مجالها ومداها.

18 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y ، حيث: $X = \{-2 , -3 , -4\}$ ، $Y = \{3 , 8 , 9 , 15\}$ ،

وكان $x \, R \, y$ تعني "$y = x^2 - 1$" لكل $x \in X$, $y \in Y$:

1 **اكتب** R كمجموعة أزواج مرتبة. 2 **هل** العلاقة تمثل دالة أم لا؟ وإذا كانت دالة، **فأوجد** مجالها ومداها.

19 إذا كانت: R علاقة على X ، حيث: $X = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$ ، وكان $x \, R \, y$

تعني "$x + y = 5$" لكل $x \in X$, $y \in X$:

1 **اكتب** R كمجموعة أزواج مرتبة. 2 **مثل** العلاقة بالمخطط السهمي.

3 **هل** العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة، **فأوجد** مجالها ومداها.

20 إذا كانت: R علاقة على X ، حيث: $X = \{-1 , 0 , \frac{1}{2} , 2\}$ ، وكان $x \, R \, y$

تعني "x معكوسًا ضربيًا لـ y" لكل $x \in X$, $y \in X$:

1 **اكتب** R كمجموعة أزواج مرتبة.

2 **هل** العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة، **فأوجد** مجالها ومداها.

21 إذا كانت: $f(x) = x^2 - x + 3$ ، **فأوجد:** $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$

22 إذا كانت: $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ ، **فأثبت أن:** $f(\frac{1}{2}) = f(2)$

23 إذا كانت: $f(x) = 3 - x$ ، $g(x) = x^2 + 4$ **فأوجد:**

1 $f(2) - 2g(\sqrt{2})$ 2 $f(\sqrt{3}) + g(\sqrt{3}) + \sqrt{3}$

24 إذا كانت: $X = \{4 , 6 , 8\}$ ، $Y = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ ، وكانت f دالة من X إلى Y حيث: $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$

فاكتب f كمجموعة أزواج مرتبة، ثم **أوجد** مدى الدالة ومثلها بيانيًا.

25 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ ، N هي مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت f دالة من X إلى N

حيث: $f(x) = x^2 - 1$ ، **فاكتب** f كمجموعة أزواج مرتبة، ثم **أوجد** مدى الدالة.



26 إذا كانت: R علاقة على X ، حيث: $X = \{x : x \in N , 10 \leqslant x < 100\}$ ،

حيث $x \, R \, y$ تعني "$y = 5x$" لكل $x \in X$, $y \in X$ ، **فأوجد** عدد عناصر العلاقة R

27 إذا كانت: $R = \{(1 , n) , (2 , m) , (3 , 7)\}$ ، دالة من X إلى Y وكانت: $X = \{1 , 2 , 3\}$ ، $Y = \{n , m , 7 , 9\}$ ،

حيث $x \, R \, y$ تعني أن "$y = x + 4$" **فأوجد:** 1 قيمة كل من n , m 2 مدى الدالة.

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت: R دالة من X إلى Y ، حيث: $X = \{1, 5, 7\}$ ، $Y = \{3, 5\}$ ، وكانت $R = \{(1, 3), (5, 3), (a, 3)\}$

فإن: $a = $ ....

(أ) 1 (ب) 5 (جـ) 7 (د) 3

2 الرابع المتناسب للأعداد 14 , 12 , 8 هو ....

(أ) 16 (ب) 21 (جـ) 24 (د) 32

3 إذا كانت: $n(X^2) = 4$ ، $n(X \times Y) = 12$ ، فإن: $n(Y) = $..............

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 6 (د) 8

4 إذا كانت: $R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ فإن R تمثل دالة مداها ....

(أ) $\{1, 2, 3\}$ (ب) $\{1, 2, 3, 4\}$ (جـ) $\{4\}$ (د) $\varnothing$

5 إذا كانت: $f(x) = 2x - 1$ ، فإن: $f(2) - 3f(1) = $ ....

(أ) 3 (ب) 1 (جـ) 7 (د) 0

6 إذا كانت: $X = \{2, 3, 5\}$ ، $Y = \{6, 7, 8, 9\}$ ، فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة من X إلى Y؟

(أ) $\{(2, 6), (3, 8), (2, 9)\}$ (ب) $\{(2, 9), (5, 9)\}$

(جـ) $\{(2,9), (3, 6), (5, 6), (2, 8)\}$ (د) $\{(2, 6), (3, 7), (5,9)\}$

2 أكمل ما يأتي:

1 مجال الدالة: $\{(1,2), (2, 4), (4, 5), (6, 8)\}$ هو ....

2 إذا كانت: $X \times Y = \{(2, 3)\}$ ، فإن: $X^2 = $ ....

3 إذا كانت: $f(x) = 2x + 5$ ، فإن: $f(\frac{1}{2}) = $ ....

3 أجب عما يأتي:

1 إذا كانت: $X = \{2, -1\}$ ، $Y = \{4, 0\}$ ، $Z = \{4, 5, -2\}$ ، فأوجد:

(أ) $X \times Y$ (ب) X^2 (جـ) $(Z \cap Y) \times X$

(د) $n(Y \times Z)$ (هـ) $n(Y^2)$ (و) $n[(X - Y) \times Z]$

2 إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ ، فأثبت أن: $(2a - 3b), (a + 2b), 10, 26$ كميات متناسبة.

3 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y ، حيث: $X = \{0, 3, 4\}$ ، $Y = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ، وكان $x R y$ تعنى "$y = 2(x+1)$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (ب) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.

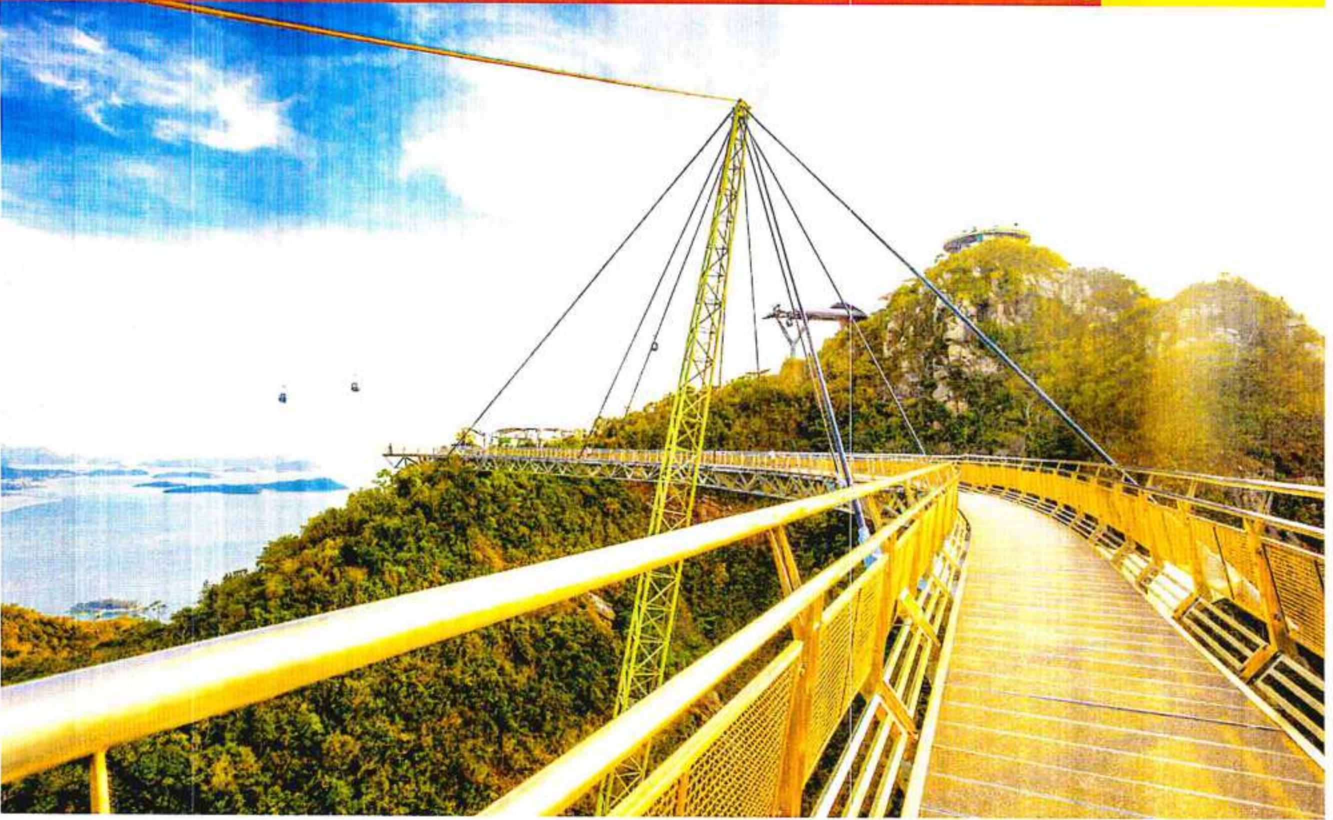
(جـ) هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة، فأوجد مجالها ومداها.

ذاكر

الدرس 3

الدالـة الخطيـة

(Linear Function)





نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على مفهوم الدالة الخطية.
- يمثل الطالب الدالة الخطية بيانيًا.
- يتعرف الطالب على مفهوم الدالة الثابتة.
- يمثل الطالب الدالة الثابتة بيانيًا.
- يستخدم الطالب التكنولوجيا فى تمثيل الدالة الخطية والدالة الثابتة.
- يستخدم الطالب الدالة الخطية والدالة الثابتة لحل بعض المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

- دالـة خطيـة (**Linear Function**)
- دالـة ثابتـة (**Constant Function**)



فكر وناقش



- يمتلك سمير أوراقًا مالية فئة 50 جنيهًا، وأوراقًا مالية فئة 20 جنيهًا، فإذا اشترى سمير قميصًا ثمنه 390 جنيهًا، **فكم عدد الأوراق التى يعطيها للبائع من كل نـوع؟**



- **فى هذا الدرس، سـوف نتعلم بعض الصـور المختلفـة للدالـة؛ منهـا الدالة الخطيـة، والدالة الثابتـة، وطريقة تمثيلها بيانيًا، مما سيمكّنك من حـل مثل هذه المشكـلات الحياتيـة.**



تعلم 1 الدالة الخطية

- الدالـة f حيث $f(x) = ax + b$ ، a , b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$ تسمى **دالة خطيـة**.
- الدالة الخطية تكون من الدرجة الأولى، وتُمَثَّل بيانيًّا بخط مستقيم يقطع محور Y فى النقطة $(0 , b)$ ، ويقطع محور X فى النقطة $(\frac{-b}{a} , 0)$

فمثلًا الدالة f حيث $f(x) = 2x + 4$ دالة خطية من الدرجة الأولى، وتمثل بيانيًّا بخط مستقيم يقطع محور Y فى النقطـة $(0 , 4)$ ، ويقطع محور X فى النقطـة $(-2 , 0)$

نقاط هامة

- عند تمثيل الدالة الخطيـة بيانيًّا يمكن الاكتفاء بإيجاد زوجين مرتبيـن ينتميان إلى الدالـة، ويمكنك إيجاد زوج مرتب ثالـث للتحقق من أن النقط الثلاث الممثلة للأزواج المرتبة تقع على خط مستقيم واحد.
- مجال الدالة الخطية هو R ولكن فى بعض التطبيقات الحياتية يكون المجال مجموعة جزئية فعلية من R.

مثـال 1

مثِّل بيانيًّا الدالـة f حيث $f(x) = 2x + 3$ ثم أوجد نقط التقاطع مع محورى الإحداثيـات.

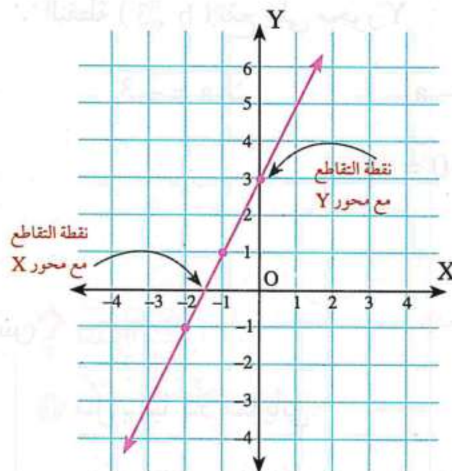
الحـل

- بوضع أى ثلاث قيم للمتغير x ولتكن -1 ، 0 ، -2 وإيجاد قيم الدالة عندها.

عند $x = -1$	عند $x = 0$	عند $x = -2$
$\therefore f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$	$\therefore f(0) = 2(0) + 3 = 3$	$\therefore f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$
$\therefore (-1 , 1) \in f$	$\therefore (0 , 3) \in f$	$\therefore (-2 , -1) \in f$

- نضع الأزواج المرتبـة فى جدول كما يلى:

x	-1	0	-2
$f(x)$	1	3	-1



- نقطة التقاطع مع محور X هى: $(\frac{-b}{a} , 0)$ أى: $(\frac{-3}{2} , 0)$

ونقطة التقاطع مع محور Y هى: $(0 , b)$ أى: $(0 , 3)$

سؤال 1

مثِّل بيانيًّا الدالـة f حيث $f(x) = 2x - 1$ ثم أوجد نقط التقاطع مع محورى الإحداثيـات.



نقاط هامة

- إذا كان: $b = 0$ ، $a \neq 0$ فإن الدالـة f حيث $f(x) = ax$

يمثِّلها بيانيًّا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0 , 0)$

مثـال 2

مثِّل بيانيًّا الدالـة g حيث $g(x) = -\frac{1}{2}x$

الحـل

- بوضع أى ثلاث قيم للمتغير x ويفضل أن نختار أعدادًا تقبل القسمة على 2 ولتكن -2 ، 0 ، 2

عنـد $x = -2$

$g(-2) = -\frac{1}{2}(-2) = 1$

عنـد $x = 0$

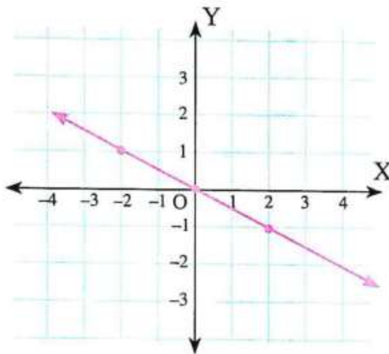
$g(0) = -\frac{1}{2}(0) = 0$

عنـد $x = 2$

$g(2) = -\frac{1}{2}(2) = -1$

- نضع الأزواج المرتبـة فى جدول كما يلى:

x	-2	0	2
$g(x)$	1	0	-1



مثـال 3

إذا كان المستقيم الممثل للدالـة f حيث $f(x) = 6x - a$ يقطع محور Y فى النقطة $(b , 3)$

فأوجـد قيمـة $2a + 7b$

الحـل

$\because$ النقطة $(b , 3)$ تقع على محور Y فإن $b = 0$ $\therefore$ النقطه هى $(0 , 3)$

$\therefore f(0) = 3$ $\therefore 3 = 6(0) - a$ $\therefore a = -3$

$\therefore 2a + 7b = 2(-3) + 7(0) = -6 + 0 = -6$



سؤال 2

1. **مثِّل بيانيًّا كلًّا مما يأتى:**

(أ) $f(x) = \frac{1}{4}x$

(ب) $g(x) = 3x + 1$

2. إذا كانت $f(x) = 3x - 6$ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة $(a , 2a)$

فأوجد قيمة a ، ثم أوجد نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور Y

تعلم 2 الدالة الثابتة

- الدالـة f حيث $f(x) = b$ ، b عدد حقيقى لا يساوى الصفر تسمى **الدالة الثابتـة.**
وهى من الدرجة الصفرية، ويمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور X ويمر بالنقطة $(0, b)$

فمثلًا: الدالة f حيث $f(x) = -4$ دالة ثابتـة من الدرجة الصفريـة، وتمثَّل بيانيًا بخط مستقيم يـوازى محور X ويمر بالنقطة $(0, -4)$

- الدالة f حيث $f(x) = 0$ تسمى الدالة الصفرية ، وهى غير معرفة الدرجة ويمثلها بيانيًا محور X نفسـه وهى **المحايد الجمعى لعملية جمع الدوال.**

مثال 4

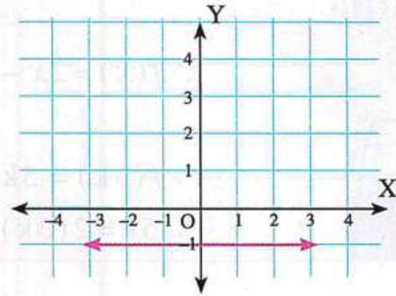
مثِّل بيانيًا كلًا مما يأتى:

1 $f(x) = -1$

2 $g(x) = 4$

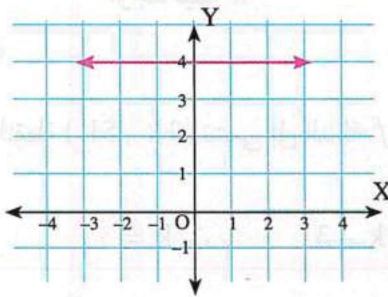
الحل

1



$\therefore f(x) = -1$ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور X ويمر بالنقطة $(0, -1)$

2



$\therefore g(x) = 4$ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور X ويمر بالنقطة $(0, 4)$

مثال 5

إذا كانت $f : R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 5$ فأوجد قيمة كلٍ من:

1 $f(2)$

2 $f(2) - f(-2)$

3 $2f(3)$

4 $f(x^2)$

5 $f(x + 1)$

6 $\dfrac{2f(4)}{3f(7)}$

الحل

1 $f(2) = 5$

2 $f(2) - f(-2) = 5 - 5 = 0$

3 $2f(3) = 2 \times 5 = 10$

4 $f(x^2) = 5$

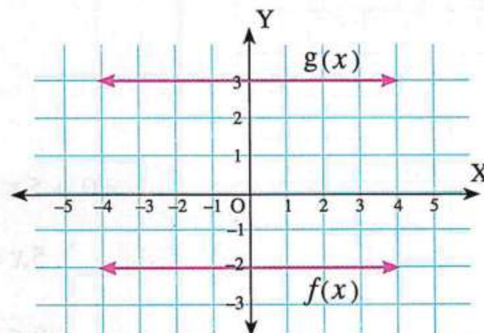
5 $f(x + 1) = 5$

6 $\dfrac{2f(4)}{3f(7)} = \dfrac{2 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{2}{3}$

مثال 6

مثِّل بيانيًا كلًا من: $f(x) = -2$ ، $g(x) = 3$ ثم أوجد المسافة العمودية بين المستقيمين الممثلين للدالتين f ، g

الحل



- المسافة العمودية بين المستقيمين:

$= |3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$

$\therefore$ المسافة العمودية بين المستقيمين الممثلين للدالتين f ، g هى 5 وحدة طول

سؤال 3

مثِّل بيانيـًا الدالـة f حيث $f(x) = 5$ ، وإذا كان المستقيم يمر بالنقطة $(3, k)$ فما قيمـة k ؟

تطبيقات على الدالة الخطية:

مثال 7 إذا كانت $f(x) = ax + 3$ ، والمستقيم الذى يمثل الدالة f يقطع محور X فى النقطة $(\frac{3}{4}, 0)$

فأوجد قيمة كلٍّ من: a ، $f(-1)$

الحل

$\because f(x) = ax + 3$

، ∵ المستقيم الذى يمثل الدالة f يقطع محور X فى النقطة $(\frac{3}{4}, 0)$

$\therefore f(\frac{3}{4}) = 0 \qquad \therefore 0 = a \times \frac{3}{4} + 3 \qquad \therefore \frac{3a}{4} = -3 \qquad \therefore a = -4$

$\therefore f(x) = -4x + 3 \qquad \therefore f(-1) = -4(-1) + 3 = 7$



مثال 8 إذا كان $(3k , 5k)$ ينتمى إلى الدالة f حيث $f(x) = 2x - 3$

أوجد قيمة k

الحل

$\because f(x) = 2x - 3$

، ∵ النقطة $(3k , 5k)$ تنتمى إلى الدالة f

$\therefore f(3k) = 5k$

$\therefore 5k = 2(3k) - 3 \qquad \therefore 5k = 6k - 3 \qquad \therefore k = 3$

مثال 9

إذا كانت تكلفة إنتاج عدد من الكتب تعطى بالعلاقة $f(x) = 10 + 5x$

حيث x عدد الكتب ، $f(x)$ التكلفة الكلية بالجنية.

كَوّن جدولًا يبين بعض قيم x والتكلفة الكلية المناظرة لها، ثم مثِّله بيانيًا.

ثم أوجد عدد الكتب التى يمكن إنتاجها بتكلفة كلية تبلغ 90 جنيهًا.

الحل

$\because f(x) = 10 + 5x$

$\therefore f(0) = 10 + 5(0) = 10 \quad , \quad f(2) = 10 + 5(2) = 20$

$, \quad f(4) = 10 + 5(4) = 30$

x	0	2	4
$f(x)$	10	20	30

وإذا كانت التكلفة = 90 جنيهًا فإن: $f(x) = 90$

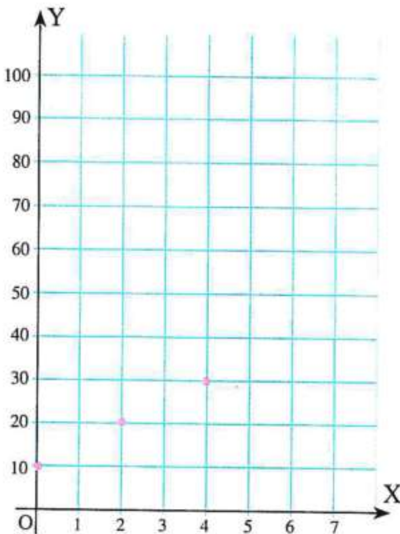
$\therefore 10 + 5x = 90$

$\therefore \quad 5x = 90 - 10 = 80 \qquad \therefore x = \frac{80}{5} = 16$

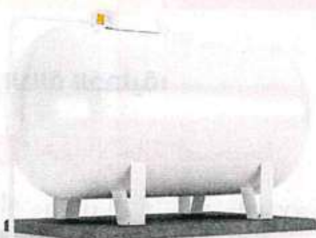
∴ عدد الكتب التى يمكن إنتاجها بتكلفة تبلغ 90 جنيهًا هو 16 كتابًا.

لاحظ أن

- عندما $x = 0$ فإن $f(x) = 10$ أى عندما تكون عدد الكتب المنتجة تساوى صفرًا فإن التكلفة تكون 10 جنيهات وهذا المبلغ هو تكلفة ثابتة لا تتوقف على عدد الكتب.
- قيم x لا يمكن أن تكون سالبة ولا يمكن أن تكون أعدادًا موجبة غير صحيحة فلا يمكن أن يكون عدد الكتب (-3) كتاب أو (1.5) كتاب؛ لذا فإن المجال هو مجموعة الأعداد الطبيعية N وتمثل الدالة بنقط منفصلة.



مثال 10



خزان سعتـه 216 لترًا ممتلئ بالماء تمامًا، يتسرب منه الماء بحيث تكون العلاقة بين كمية الماء المتبقية فى الخزان $f(t)$ باللتر، والوقت المنقضى (t) بالساعة تعطى بالدالـة f حيث $f(t) = 216 - 6t$

1 مثِّل هذه الدالة بيانيًا موضحًا المجال.

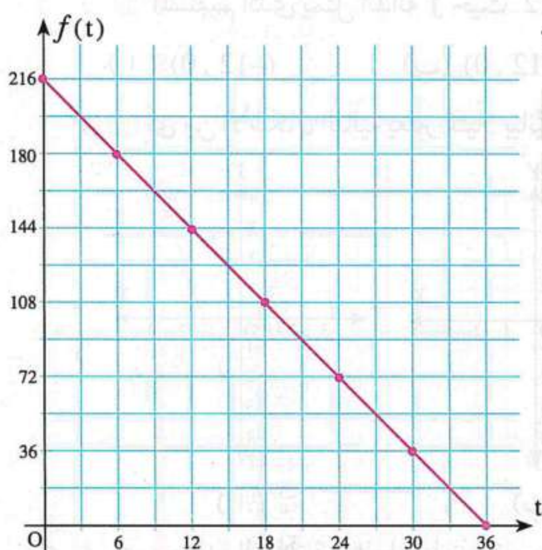
2 متى يفرغ الخزان تمامًا؟

الحـل

$\because f(t) = 216 - 6t$

$\because f(0) = 216 \ , f(6) = 180 \ , f(36) = 0$

t	0	6	36
$f(t)$	216	180	0



لاحظ أن

- عندما $t = 0$ يكون الخزان ممتلئًا تمامًا، وعندما $t = 36$ ساعة يكون الخزان فارغًا تمامًا
- قيم t لا يمكن أن تكون سالبة ولكن قيم t يمكن أن تكون أعدادًا موجبة غير صحيحة مثل $1\frac{1}{2}$ ساعة، لذلك تمثل الدالة بقطعة مستقيمة بدايتها النقطة (0,216) ونهايتها النقطة (36,0) لذلك المجال = [0,36]

سؤال 4

1 إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالـة f حيث $f(x) = bx + 7$ يمر بالنقطة (3 , 2) ، **فما قيمة كل من:** b ، $f(-2)$ ؟

2 الجدول المقابل يمثل مجموعة من الأزواج المرتبة للدالة f حيث $f(x) = 3x + 5$

أوجد قيمة كل من: a ، b ، a + b

x	3	a	b
$f(x)$	14	20	26

3 تستخدم شركة للشحن الدالـة f حيث $f(x) = 12 + 5.5x$ لحساب تكلفة الشحن لطردٍ ما ، حيث x تعبر عن وزن الطرد بالكيلوجرامات، وكانت رسوم التجهيز الثابتة للطرد هى 12 جنيهًا ، وتكلفة الشحن لكل كيلوجرام من وزن الطرد هى 5.5 جنيه. **أوجد تكلفة شحن طرد وزنه 15 كيلوجرامًا.**

أسئلة الكتاب المدرسى

الدالة الخطية:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الدالة f حيث $f(x) = ax + b$ تُمثل بيانيًا بخط مستقيم يقطع محور Y فى النقطة ....

(ا) $(0 , b)$ (ب) $(b , 0)$ (جـ) $\left(\frac{-b}{a} , 0\right)$ (د) $(0 , 0)$

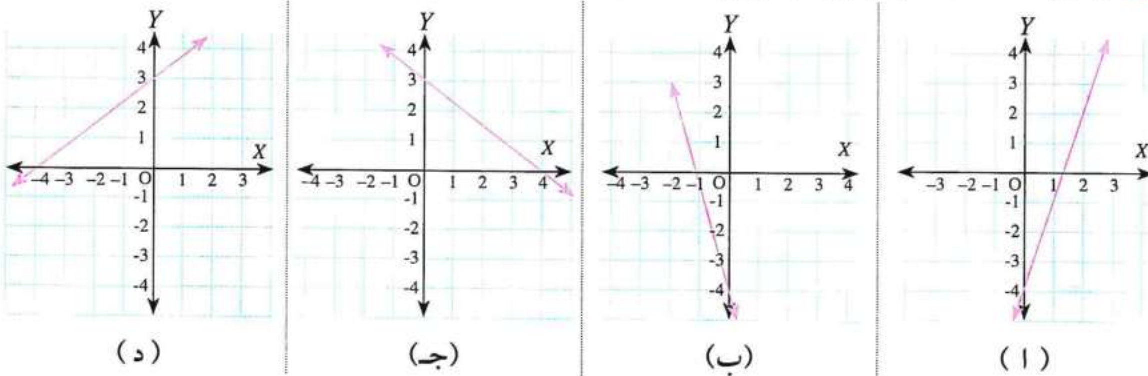
2 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 6 - 2x$ يقطع محور Y فى النقطة ....

(ا) $(0 , -6)$ (ب) $(0 , -3)$ (جـ) $(0 , 3)$ (د) $(0 , 6)$

3 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 3x - 12$ يقطع محور X فى النقطة ....

(ا) $(-12 , 0)$ (ب) $(12 , 0)$ (جـ) $(4 , 0)$ (د) $(-4 , 0)$

4 أى من الأشكال التالية يعتبر تمثيلًا بيانيًا للدالة f حيث $f(x) = 3x - 4$؟



(ا) (ب) (جـ) (د)

5 أى من الدوال الآتية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل؟ ....

(ا) $f(x) = x - 6$ (ب) $f(x) = 2x$ (جـ) $f(x) = 7 - x$ (د) $f(x) = 2x + 1$

6 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = -3x$ يمر بالنقطة ....

(ا) $(-3 , 0)$ (ب) $(0 , -3)$ (جـ) $(0 , 0)$ (د) $(-3 , -3)$

7 الزوج المرتب $(2 , 1)$ ينتمى للدالة f التى قاعدتها ....

(ا) $f(x) = 2x - 1$ (ب) $f(x) = -3x + 7$ (جـ) $f(x) = 2x + 1$ (د) $f(x) = -3x + 5$

8 الزوج المرتب الذى ينتمى للدالة f حيث $f(x) = 5 - 2x$ هو ....

(ا) $(-1 , 3)$ (ب) $(-1 , -3)$ (جـ) $(1 , 3)$ (د) $(1 , -3)$

9 الزوج المرتب $(2 , 3)$ لا ينتمى للدالة التى قاعدتها ....

(ا) $f(x) = 5 - x$ (ب) $f(x) = 3x - 7$ (جـ) $f(x) = 9 - x$ (د) $f(x) = x - 1$

2 مثل بيانيًا كلًا مما يأتى:

1 $f(x) = x + 2$

2 $f(x) = 3x$

3 $f(x) = 2x - 5$ وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى X , Y

4 $f(x) = 2 - x$ وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى X , Y

5 $f(x) = 5 - 3x$

6 $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم مع محورى X , Y

الدالة الثابتة:

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 الدالة الثابتة $f(x) = b$ ، (حيث $b \neq 0$) يُمثل بيانيًا بخط مستقيم ....

(ا) يوازى محور Y (ب) يوازى محور X (جـ) عمودى على محور X (د) يمر بنقطة الأصل

2 الدالة الثابتة $f(x) = 0$ ، تُمثل بيانيًا بـ..............

(ا) خط مستقيم يوازى محور X (ب) خط مستقيم يوازى محور Y

(جـ) محور X (د) محور Y

3 الدالة الثابتة $f(x) = b$ ، (حيث $b \neq 0$) تكون من الدرجة ....

(ا) الثانية (ب) الأولى (جـ) الصفرية (د) ليس لها درجة

4 الدالة $f(x) = 7$ ، يمثلها مستقيم يوازى محور X ويمر بالنقطة ....

(ا) $(7 , 0)$ (ب) $(0 , 7)$ (جـ) $(0 , 0)$ (د) $(7 , -7)$

5 إذا كانت $f : R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 5$ فإن: $f(3) =$ ....

(ا) 3 (ب) -5 (جـ) 5 (د) 0

6 إذا كانت $f : R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 3$ فإن: $f(2) + f(-2) =$ ....

(ا) 0 (ب) -4 (جـ) 4 (د) 6

7 إذا كانت $f : R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 4$ فإن: $\frac{f(4)}{f(8)} =$ ....

(ا) 4 (ب) 1 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) 8

8 إذا كانت $f : R \longrightarrow R$ وكانت $f(x) = 7$ فما قيمة $\frac{5 f(4)}{10 f(6)}$؟ ....

(ا) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{7}{3}$ (د) $\frac{7}{2}$

4 مثل بيانيًا كلًا من الدوال الآتية:

1 $f(x) = 2$ 2 $f(x) = -4$

تطبيقات الدالة الخطية:

5 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت النقطة $(K , 6)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = 2x$ ، فما قيمة K؟ ....

(ا) -3 (ب) 3 (جـ) 6 (د) -6

2 إذا كانت النقطة $(K , 5)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = 2x - 7$ ، فما قيمة K؟ ....

(ا) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

3 إذا كانت النقطة $(a - 1 , 2)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = 4x - 5$ ، فما قيمة a؟ ....

(ا) 4 (ب) 1 (جـ) 3 (د) 2

4 إذا كانت النقطة (5K , K) تنتمى للدالة f ، حيث $f(x) = 3x + 14$ ، فما قيمة K؟ ....

(أ) 14 (ب) 10 (جـ) 7 (د) -1

5 إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = Kx + 4$ ، يمر بالنقطة (1 , 1) ، فما قيمة $f(-1)$ ؟ ....

(أ) -7 (ب) -1 (جـ) 1 (د) 7

6 إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = 2x + b$ ، يمر بالنقطة (5 , -1) ، فما قيمة $f(0)$ ؟ ....

(أ) -7 (ب) -5 (جـ) 5 (د) 7

7 إذا كانت النقطة (a , 4) تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، حيث $f(x) = 2x + b$ ، فإن: $6a + 3b =$ ....

(أ) 12 (ب) 9 (جـ) 6 (د) 3

6 إذا كانت $f(x) = 2x + 3$ ، وكانت $f(k) = 11$ ، **أوجد** قيمة k؟

7 إذا كانت $f(x) = 5x + 4$ ، وكانت $f(2) = 2k$ ، **أوجد** قيمة k؟

8 إذا كانت $f(x) = 5x - b$ ، والنقطة (4 , 2) . تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، **أوجد** قيمة كل من b , $f(0)$

9 إذا كانت $f(x) = \frac{2}{3}x - 7$ ، تُمثل بخط مستقيم يمر بالنقطة (m , 3m) . **فأوجد** قيمة m ، **ثم أوجد** نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور Y

10 إذا كانت $f(x) = 2x + a$ ، يقطع محور Y فى النقطة (b , 2) ، **أوجد** قيمة 2a – 5b

11 الجدول المقابل يمثل مجموعة من الأزواج المرتبة للدالة f
حيث $f(x) = 4x + 5$ ، **أوجد** قيمة (a – b)

x	3	a	8
$f(x)$	17	29	b

12 سيارة تسير بسرعة ثابتة من نقطة تبعد 50 كم عن القاهرة، فإذا كانت المسافة (d) بالكيلو متر التى تبعدها السيارة عن القاهرة بعد مرور زمن (t) بالساعة تتحدد بالعلاقة $d(t) = 100t + 50$. **مثل** الدالة d بيانيًّا، **فأوجد** الزمن اللازم حتى يكون بُعد السيارة عن القاهرة 550 كم.



13 سعر ماكينة تصوير بعد t سنة يُعطى بالجنيه بالدالة f ،
حيث $f(t) = 12000 - 750t$ ، **أوجد** سعر ماكينة التصوير بعد 4 سنوات من شرائها، **أوجد** بعد كم سنة يصبح سعر ماكينة التصوير 3000 جنيه.



14 إذا كانت تكلفة استئجار ملعب كرة قدم بالجنيه تُعطى بالدالة f ،
حيث $f(t) = 120t + 80$ ، حيث t عدد ساعات استئجار الملعب،
فأوجد تكلفة استئجار الملعب لمدة ساعتين،
وبعد كم ساعة تكون التكلفة 680 جنيهًا؟

15 في محلات السوبر ماركت ستجد غالبًا سلال تسوق متراصة داخل بعضها البعض،



إذا كانت السلال كلها متطابقة وارتفاعها بالسنتيمتر وهى متداخلة يُعطى

بالدالة f حيث $f(n) = 3n + 20$ ، حيث n عدد السلال المتداخلة،

فأوجد ارتفاع السلال عندما يكون عددها 10 سلال،

ثم أوجد عدد السلال إذا كان الارتفاع 2 متر مثل بيانيًا الدالة f

تفكير إبداعى TIMSS



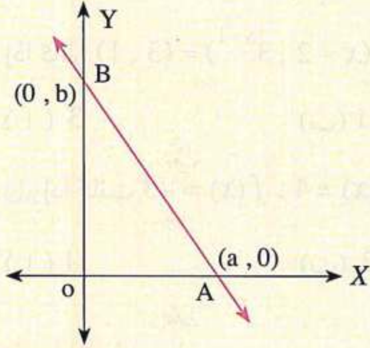
16 الجدول المقابل يمثل مجموعة من الأزواج المرتبة للدالة f

x	5	−3	9	11
$f(x)$	−7	9	−15	b

حيث $f(x) = mx + 3$ ، **أوجد** نقطة تقاطع الدالة g مع محور Y

حيث $g(x) = ax + b$

17 **فى الشكل المقابل:**



يمثل الدالة f حيث $f(x) = 4 - 2x$ **أوجد** a , b ،

ومساحة سطح المثلث OAB.

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x + 3k$ يمر بنقطة الأصل، فإن: .... $= k$

(أ) 3 (ب) -3 (جـ) 0 (د) $\frac{-3}{2}$

2 إذا كانت النقطة $(4 , k)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 5x + 14$ ، فما قيمة k؟ ....

(أ) 20 (ب) 2 (جـ) 0 (د) -2

3 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x - 1$ ، يقطع محور Y فى النقطة ....

(أ) $(\frac{1}{2} , 0)$ (ب) $(0 , -1)$ (جـ) $(-1 , 0)$ (د) $(0 , \frac{1}{2})$

4 الدالة $f(x) = 5$ ، يمثلها مستقيم يوازى محور X ويمر بالنقطة ....

(أ) $(0 , 5)$ (ب) $(5 , 0)$ (جـ) $(5 , -5)$ (د) $(0 , 0)$

5 إذا كان: $(x - 2 , 3^{y-1}) = (3 , 1)$ ، فإن: .... $= y - x$

(أ) 3 (ب) 1 (جـ) 4 (د) -4

6 إذا كانت $f(x) = -3$ ، $g(x) = 4$ ، فما المسافة العمودية بين المستقيمين الممثلين للدالتين f , g ؟ ....

(أ) 1 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 7

2 أكمل ما يأتى:

1 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x$ يمر بالنقطة ....

2 إذا كانت: $f : R \rightarrow R$ وكانت $f(x) = 7$ فإن: .... $= 2f(5) - 10$

3 مدى الدالة $\{(1 , 2) , (3 , 4) , (5 , 6) , (0 , 4)\}$ هو ....

3 أجب عما يأتى:

1 إذا كانت: a , b , c , d كميات فى تناسب متسلسل، **فأثبت أن:** $\frac{bd}{a} = \frac{c^2 - d^2}{a - c}$

2 إذا كان: $X \times Y = \{(1 , 1) , (1 , 3) , (1 , 5)\}$ **فأوجد:**

(أ) X , Y (ب) X^2 (جـ) $n(Y^2)$

3 مثل بيانيًا $f(x) = 3x - 2$ **وأوجد** نقطتى تقاطع المستقيم الممثل للدالة f مع محورى X , Y

4 إذا كانت: $f(x) = 8x - k$ ، والنقطة $(\frac{1}{2} , 1)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، **فأوجد** قيمة كل من k ، $f(\frac{1}{4})$

ذاكر

الدرس 4

معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد

(Equations and Inequalities of the First Degree in One Variable)





نواتج التعلم



- يتعرف الطالب على مفهوم معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- يحل الطالب معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R.
- يتعرف الطالب مفهوم متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد.
- يحل الطالب متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R.
- يستخدم الطالب المعادلات والمتباينات لحل بعض المشكلات الحياتية.

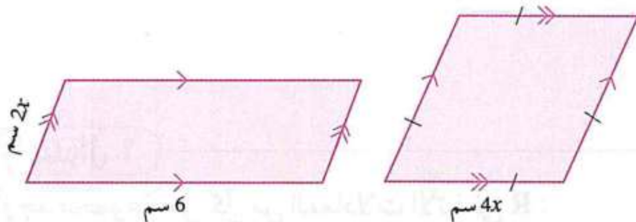
مفردات أساسية

- معـــــادلات (Equations)
- الدرجة الأولى (First Degree)
- متباينات (Inequalities)

فكر وناقش

- فى الشكل المقابل:

معين طول ضلعه $4x$ سم، ومتوازى أضلاع طولا ضلعين متجاورين فيه $2x$ سم ، 6 سم، **ما قيمة x التى تجعل محيط المعين يساوى محيط متوازى الأضلاع؟**



- فى هذا الدرس، سوف نتعرف على كيفية حل معادلات ومتباينات الدرجة الأولى، مما سيمكّنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم 1 معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

- الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد هى: $ax + b = 0$

حيث a ، b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$

معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد: يكون فيها المتغير الوحيد مرفوعًا للأس واحد.

أمثلة:

معادلات فى متغير واحد من الدرجة الأولى

- $2x + 7 = 0$
- $\frac{1}{3}x - 1 = 6$
- $\sqrt{3}\, y - 2 = 1$

معادلات فى متغير واحد ليست من الدرجة الأولى

- $5\sqrt{x} - 24 = 0$
- $x^2 - 7 = 2$
- $\frac{1}{x} + 5 = x - 4$

حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R:

- يقصد بحل المعادلة هو إيجاد قيم المتغير التى تحقق المعادلة.
- معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد لها حل وحيد فى R



خواص علاقة التساوى:

إذا كانت a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية ، a = b فإن:

1 $a + c = b + c$

2 $a - c = b - c$

3 $ac = bc$

4 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى R:

1 $4x - 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

2 $3(\sqrt{5}\,x - 2) - 1 = 8$

الحل

1
$\because 4x - 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
$\therefore 4x = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
$\therefore 4x = 12\sqrt{3}$
$\therefore x = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$
∴ مجموعة الحل = $\{3\sqrt{3}\}$

2
$\because 3(\sqrt{5}\,x - 2) - 1 = 8$
$\therefore 3\sqrt{5}\,x - 6 - 1 = 8$
$\therefore 3\sqrt{5}\,x - 7 = 8$
$\therefore 3\sqrt{5}\,x = 8 + 7$
$\therefore 3\sqrt{5}\,x = 15$ $\quad \therefore x = \frac{15}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$
$\therefore x = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$
$\therefore x = \sqrt{5}$
∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{5}\}$

س؟ سؤال 1

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى R :

1 $\sqrt{3}\,x - 1 = 2$

2 $2x + 5 = 3$

3 $4 - \sqrt{5}\,x = |-9|$

مثـال 2 أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين فى R:

1 $2x + 4\sqrt{6} = -7x - 5\sqrt{6}$

2 $2\sqrt{2}(x-1) = 2(\frac{x}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2})$

الحـل

1

$\because 2x + 4\sqrt{6} = -7x - 5\sqrt{6}$

$\because 2x + 7x = -5\sqrt{6} - 4\sqrt{6}$

$\therefore 9x = -9\sqrt{6}$

$\therefore x = \frac{-9\sqrt{6}}{9} = -\sqrt{6}$

∴ مجموعة الحل = $\{-\sqrt{6}\}$

2

$\because 2\sqrt{2}(x-1) = 2(\frac{x}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2})$

$\therefore 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2} = \frac{2x \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + 8\sqrt{2}$

$\therefore 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}$

$\therefore 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,x = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}\,x = 10\sqrt{2} \quad \therefore x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore x = 10$

∴ مجموعة الحل = $\{10\}$

انتبـه!

- إذا كانت المعادلة $ax + b = 0$ ، $a = 0$ فإنها لا تحقق شرط معادلة الدرجة الأولى، وتوجد حالتان لذلك:

1 الحالة الأولى إذا كان: $b = 0$

فمثلًا:

$2x + 3 = 2x + 3$

$2x - 2x = 3 - 3$

$0x = 0$

∴ مجموعة الحل = R

2 الحالة الثانية إذا كان: $b \neq 0$

فمثلًا:

$3x = 3x + 2$

$3x - 3x = 2$

$0x = 2$

∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

تعلم 2 متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد :

- الصورة العامة لمتباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد هى: $ax + b < 0$

حيث a ، b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$

نقاط هامة

- علامة التباين يمكن أن تكون واحدة من العلامات (≥ ، ≤ ، > ، <).
- متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد يكون فيها المتغير الوحيد مرفوعًا للأس واحد.

أمثلة :

متباينات فى متغير واحد من الدرجة الأولى	متباينات فى متغير واحد ليست من الدرجة الأولى
$5x - 7 > 0$	$x^2 - 7x \geq -6$
$3x + 2 \geq 2x$	$\frac{1}{y} - 4 \geq 1$
$\frac{y+1}{2} \leq \frac{y+3}{5}$	$2 + 3\sqrt{x} < 4$



حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى R:

- يقصد بحل المتباينة هو إيجاد قيم المتغير التى تحقق المتباينة.

خواص علاقة التباين :

إذا كان a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية وكان a < b ، فإن:

1 $a + c < b + c$

2 $a - c < b - c$

3 $ac < bc$ إذا كانت $c > 0$ موجبة c
$ac > bc$ إذا كانت $c < 0$ سالبة c

4 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ إذا كانت $c > 0$ موجبة c
$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ إذا كانت $c < 0$ سالبة c

مثال 3 أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ومثلها على خط الأعداد:

1 $3x - 4 \geq 5$

2 $6 - 3y \leq 2(y - 2)$

3 $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} < -2$

4 $2x - 9 \leq 6x + 1$

الحـل

1
$\because 3x - 4 \geq 5$
$\therefore 3x \geq 5 + 4$ $\quad$ $\therefore 3x \geq 9$
$\therefore x \geq \frac{9}{3}$ $\quad$ $\therefore x \geq 3$



$\therefore$ مجموعة الحل = $[3 , \infty[$

2
$\because 6 - 3y \leq 2(y - 2)$
$\therefore 6 - 3y \leq 2y - 4$
$\therefore -3y - 2y \leq -4 - 6$ $\quad$ $\therefore -5y \leq -10$
$\therefore y \geq \frac{-10}{-5}$ $\quad$ $\therefore y \geq 2$



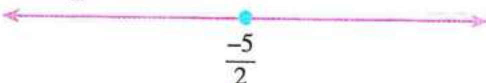
$\therefore$ مجموعة الحل = $[2 , \infty[$

3
$\because \frac{2x}{3} - \frac{x}{6} < -2$
$\therefore \frac{2 \times 2x}{2 \times 3} - \frac{x}{6} < -2$ $\quad$ $\therefore \frac{4x}{6} - \frac{x}{6} < -2$
$\therefore \frac{3x}{6} < -2$ $\quad$ $\therefore \frac{x}{2} < -2$
$\therefore x < -4$



$\therefore$ مجموعة الحل = $]-\infty , -4[$

4
$\because 2x - 9 \leq 6x + 1$
$\therefore 2x - 6x \leq 9 + 1$
$\therefore -4x \leq 10$
$\therefore x \geq \frac{10}{-4}$
$\therefore x \geq \frac{-5}{2}$



$\therefore$ مجموعة الحل = $[-\frac{5}{2} , \infty[$

سؤال 2

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ومثلها على خط الأعداد.

1 $x + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$

2 $2(3x + 7) < x - 11$

3 $\frac{x-1}{5} - \frac{x+2}{6} \geq \frac{7}{15}$

4 $(2x + 3) - 6x > -5x + 1$

المتباينة المركبة

- المتباينة $a < x < b$ تسمى متباينة مركبة ويمكن تقسيمها إلى متباينتين $x > a$ ، $x < b$

فمثلاً: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 5 وأقل من 7 يمكن التعبير عنها بإحدى الطريقتين :

1 $x > 5$ ، $x < 7$ **2** $5 < x < 7$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما بالشكل

5   7

مثال 4

استخدم المتباينات للتعبير عن كل مما يأتى بطريقتين، ومثلها على خط الأعداد:

1 مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 5 وأقل من 9

2 مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 2 – وأقل من أو تساوى 4

3 مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من 8 وأكبر من أو تساوى 1–

4 مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى 2 – وأقل من أو تساوى 0

الحل

	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية	طريقة التمثيل على خط الأعداد	مجموعة الحل
1	$x > 5$, $x < 9$	$5 < x < 9$	5 9	$]5, 9[$
2	$x > -2$, $x \le 4$	$-2 < x \le 4$	−2 4	$]-2, 4]$
3	$x < 8$, $x \ge -1$	$-1 \le x < 8$	−1 8	$[-1, 8[$
4	$x \ge -2$, $x \le 0$	$-2 \le x \le 0$	−2 0	$[-2, 0]$

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية فى R ومثلها على خط الأعداد:

1 $4 \le x + 2 < 8$ **2** $-7 < 5x + 3 < 18$ **3** $1 \le 4 - 3(x + 1) < 13$

الحل

1

$\because 4 \le x + 2 < 8$

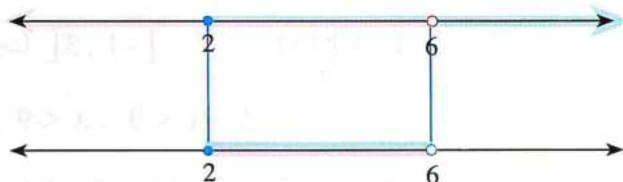
$\therefore x + 2 \ge 4 \quad , \quad x + 2 < 8$

$x \ge 4 - 2 \quad , \quad x < 8 - 2$

$x \ge 2 \quad , \quad x < 6$

$\therefore x \in [2, \infty[\quad , \quad x \in]-\infty, 6[$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [2, \infty[\cap]-\infty, 6[$



$\therefore$ مجموعة الحل $= [2, 6[$

تنوع الاستراتيجيات

يمكنك الحل مباشرة مع تطبيق خواص التباين

$\because 4 \le x + 2 < 8$

$\therefore 4 - 2 \le x < 8 - 2$

$2 \le x < 6$



لاحظ أن

عند تقسيم المتباينة إلى متباينتين بينهما الرابط «و» تكون مجموعة الحل هى مجموعة تقاطع مجموعتى حل هاتين المتباينتين.

2

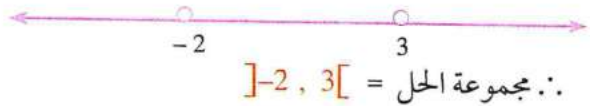
$\because -7 < 5x + 3 < 18$

$\therefore -7 - 3 < 5x < 18 - 3$

$\therefore -10 < 5x < 15$

$\therefore \frac{-10}{5} < x < \frac{15}{5}$

$\therefore -2 < x < 3$



∴ مجموعة الحل = $]-2\ ,\ 3[$

3

$\because 1 \leq 4 - 3(x + 1) < 13$

$\therefore 1 \leq 4 - 3x - 3 < 13$

$\therefore 1 \leq -3x + 1 < 13$

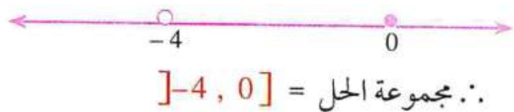
$\therefore 1 - 1 \leq -3x < 13 - 1$

$\therefore 0 \leq -3x < 12$

$\therefore \frac{0}{-3} \geq x > \frac{12}{-3}$

$\therefore 0 \geq x > -4$

$\therefore -4 < x \leq 0$



∴ مجموعة الحل = $]-4\ ,\ 0]$

مثال 6

أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية فى R ومثلها على خط الأعداد:

$$x + 8 \geq 3x - 2 \geq 2 + x$$

الحل

$\because x + 8 \geq 3x - 2 \geq 2 + x$

$\therefore x + 8 \geq 3x - 2 \quad , \quad 3x - 2 \geq 2 + x$

$\therefore x - 3x \geq -2 - 8 \quad , \quad 3x - x \geq 2 + 2$

$\therefore -2x \geq -10 \quad , \quad 2x \geq 4$

$\therefore x \leq 5 \quad , \quad \therefore x \geq 2$

$\therefore 2 \leq x \leq 5$



∴ مجموعة الحل = $[2\ ,\ 5]$

سؤال 3

1 اختر الإجابة الصحيحة:

(ا) مجموعة حل المتباينة $-2 < -x < 7$ فى R هى ....

(ا) $[-7\ ,2]$ (ب) $]-7\ ,2[$ (جـ) $[-2\ ,7]$ (د) $]-2\ ,7[$

(ب) إذا كانت $-5 \leq 5x < 15$ فإن: .... $x \in$

(ا) $]-1\ ,3[$ (ب) $]-1\ ,3]$ (جـ) $[-1\ ,3[$ (د) $[-1\ ,3]$

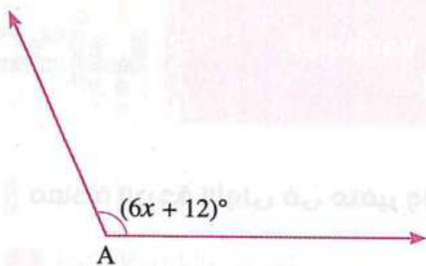
(جـ) أى مما يأتى يعبر عن قيم x الحقيقية التى تحقق $9 > x$, $9 > -x$ ؟

(ا) $9 > x > 0$ (ب) $0 > x > -9$ (جـ) $9 > x > -9$ (د) $x \geq -9$

2 أوجد مجموعة الحل فى R للمتباينة : $-10 < 2 - 3x \leq 2$ ثم مثل الحل على خط الأعداد.

مثـال 7

في الشكل التالى: إذا كانت $\angle A$ منفرجة فما هى قيم x الممكنة ؟



الحـل

نعلم أن قياس الزاوية المنفرجة أكبر من 90° وأقل من 180°

$\because 90° < m(\angle A) < 180°$

$\therefore 90° < (6x + 12)° < 180°$

$\therefore 90 - 12 < 6x < 180 - 12$

$\therefore 78 < 6x < 168$ $\qquad \therefore \frac{78}{6} < x < \frac{168}{6}$

$\therefore 13 < x < 28$

أى أن : $x \in]13 , 28[$

مثـال 8

مثلث أطوال أضلاعه 21 سم ، $(4x + 1)$ سم ، 8 سم، ما قيم x الممكنة ؟

الحـل

$\because$ طول أى ضلع فى المثلث أكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.

$\because |21 - 8| < 4x + 1 < 21 + 8$

$\therefore 13 < 4x + 1 < 29$

$\therefore 13 - 1 < 4x < 29 - 1$

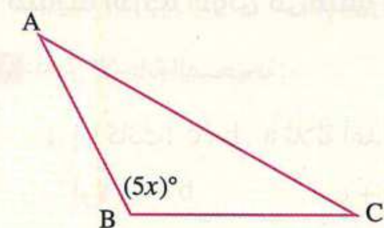
$\therefore 12 < 4x < 28$ $\qquad \therefore \frac{12}{4} < x < \frac{28}{4}$ $\qquad \therefore 3 < x < 7$

$x \in]3 , 7[$

سؤال 4

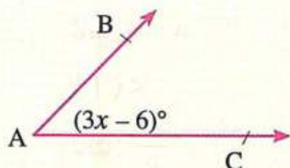
1. فى الشكل المقابل: ABC مثلث منفرج الزاوية فى B ،

ما قيم x الممكنة؟



2. فى الشكل المقابل: $\angle A$ حادة،

أوجد قيم x الممكنة؟



3. مثلث أطوال أضلاعه 20 سم، $(2x + 3)$ سم ، 13 سم، ما قيم x الممكنة؟



معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد
(Equations and Inequalities of the First Degree in One Variable)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲ تقييم ▲ ابتكار

أسئلة الكتاب المدرسى

معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أى من المعادلات الآتية معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد؟ ....

(أ) $x + y = 12$ (ب) $2x - \frac{2}{x} = 0$ (جـ) $2\sqrt{x} + 3 = 5$ (د) $2x - 4 = 3$

2 مجموعة حل المعادلة: $x - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ فى R هى ....

(أ) $\{\sqrt{3}\}$ (ب) $\{3\sqrt{3}\}$ (جـ) $\{0\}$ (د) $\varnothing$

3 مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{3}\,x = 6$ فى R هى ....

(أ) $\{6\sqrt{3}\}$ (ب) $\{-2\sqrt{6}\}$ (جـ) $\{2\sqrt{3}\}$ (د) $\{\sqrt{3}\}$

4 ما مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{2}\,x - 1 = 1$ فى R ؟ ....

(أ) $\{2\}$ (ب) $\{1\}$ (جـ) $\{\sqrt{2}\}$ (د) $\varnothing$

2 أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى R:

1 $x - 1 = 4$
2 $3x + 2 = 11$
3 $5x - 1 = -21$
4 $5x - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
5 $3x - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
6 $7x - 3 = 5x + 1$
7 $3x + \sqrt{5} = x + 3\sqrt{5}$
8 $3(x + 7) - 5x = x + 12$
9 $\sqrt{3}\,x - 3 = 0$
10 $\sqrt{2}\,x - 1 = 3$
11 $4 - \sqrt{6}\,x = |-10|$
12 $4(\sqrt{5}\,x + 8) + 20 = 72$
13 $2(\sqrt{3}\,x - 7) + 1 = 5(\sqrt{3}\,x - 1) - 2$

متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

3 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت: a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية، $a > b$ فإن:

أولًا: $b + c$ .... $a + c$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leqslant$

ثانيًا: $a - c$ .... $b - c$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geqslant$

ثالثًا: $\frac{b}{c}$ .... $\frac{a}{c}$ ، إذا كانت: $c > 0$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leqslant$

رابعًا: bc .... ac ، إذا كانت: $c < 0$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geqslant$

2 أى من المتباينات الآتية متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد؟

(أ) $x^2 - x \geqslant 3$ (ب) $0.4t - 7 < 2t$ (جـ) $\frac{2}{t} + t > 5$ (د) $3x < 2y + 5$

3 إذا كان: $x \in [5, \infty[$ فإن: ....

(أ) $x < 5$ (ب) $x > 5$ (جـ) $x \leqslant 5$ (د) $x \geqslant 5$

4 أى من المتباينات الآتية يمثل مجموعة حلها فى R بالشكل المقابل؟



(أ) $x > 3$ (ب) $x < 3$ (جـ) $x \geqslant 3$ (د) $x \leqslant 3$

5 ما مجموعة حل المتباينة: $2x < 14$ فى R؟

(أ) $]-\infty, 7[$ (ب) $]-7, \infty[$ (جـ) $]7, \infty[$ (د) $[7, \infty[$

6 ما مجموعة حل المتباينة: $-1 \leqslant x < 5$ فى R؟

(أ) $]-1, 5[$ (ب) $[-1, 5]$ (جـ) $]-1, 5]$ (د) $[-1, 5[$

7 الفترة $]-1, 2]$ هى مجموعة الحل فى R للمتباينة:

(أ) $-1 < x < 2$ (ب) $-1 < x \leqslant 2$ (جـ) $-1 \leqslant x < 2$ (د) $-1 \leqslant x \leqslant 2$

8 إذا كانت: $-2 < 2x < 6$ ، فإن: .... $x \in$

(أ) $]-1, 3[$ (ب) $]-1, 3]$ (جـ) $[-1, 3]$ (د) $[-1, 3[$

9 مجموعة حل المتباينة: $-x \leqslant -3$ فى R هو ....

(أ) $[-3, \infty[$ (ب) $]-\infty, -3]$ (جـ) $]3, \infty[$ (د) $[3, \infty[$

10 ما مجموعة حل المتباينة: $-3 < -x < 5$ فى R؟

(أ) $[-5, 3]$ (ب) $]-5, 3[$ (جـ) $[-3, 5]$ (د) $]-3, 5[$

11 أى مما يأتى تعبر عن قيم x الحقيقية التى تحقق أن: $x > -1 , x \leqslant 5$؟

(أ) $[-1, 5]$ (ب) $[-1, 5[$ (جـ) $]-1, 5]$ (د) $]-1, 5[$

12 أى مما يأتى تعبر عن قيم x الحقيقية التى تحقق أن: $x < 7 , -x < 7$؟

(أ) $7 > x > 0$ (ب) $0 > x > -7$ (جـ) $7 > x > -7$ (د) $x < -7$

4 استخدم المتباينات للتعبير عن كل مما يأتى بطريقتين، ومثلها على خط الأعداد:

1 مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو تساوى 5 وأكبر من 0

2 مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من 2 وأقل من أو تساوى 7

3 مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -1 وأقل من 3

4 مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو تساوى -2 وأكبر من أو تساوى -6

5 أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى R ، ومثلها على خط الأعداد:

1. $x + 5 < 3$
2. $5x \geqslant 20$
3. $2x + 3 < 6$
4. $\frac{x}{2} - 3 > 7$
5. $\frac{1}{2}x - 1 \leqslant 2$
6. $7 \geqslant 2x - 3$
7. $3(4x - 1) < 21$
8. $5 - 3x > 11$
9. $2(6 - 2x) \leqslant 8$
10. $25 \leqslant 5(3 - x)$
11. $\frac{3x}{4} + \frac{x}{2} > 5$

6 أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية فى R ، ومثلها على خط الأعداد:

1. $5x - 3 < 2x + 9$
2. $7x + 12 \geqslant 5x - 8$
3. $6 - 2x > -3x$
4. $3 + x \leqslant 2x + 6$
5. $8 - 3x > 3 - 2x$
6. $2x + 9 \leqslant 6x - 1$
7. $3x - 2 < 2(2 - x)$
8. $-5(x + 4) \geqslant 3(x - 4)$

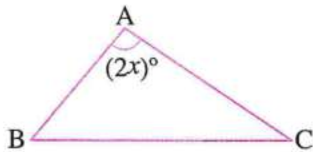
7 أوجد قيم x الحقيقية التى تحقق كلًّا مما يأتى، ومثلها على خط الأعداد:

1. $9 > x + 2 > -3$
2. $7 > 3x + 4 \geqslant 4$
3. $11 > 3x + 2 > -4$
4. $3 \geqslant 5 - x > 1$
5. $5 > 3 - 2x \geqslant 1$
6. $-8 \leqslant 4 - 3(x + 1) < 10$
7. $3x - 2 \leqslant 4(x - 1) \leqslant 3x + 6$
8. $2x + 12 < 4(5 + x) < 3x + 23$

8 فى الشكل المقابل:

ABC مثلث منفرج الزاوية فى A ،

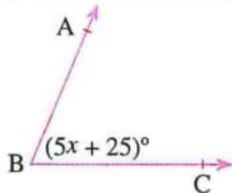
ما قيم x الممكنة؟



9 فى الشكل المقابل:

إذا كانت $\angle ABC$ زاوية حادة،

فأوجد الفترة التى تنتمى إليها قيمة x

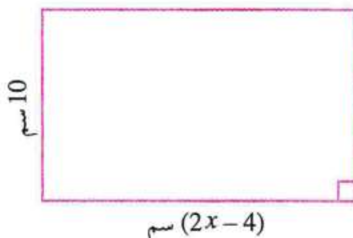


10 مثلث أطوال أضلاعه 9 سم، $(3x + 5)$ سم، 20 سم. ما قيم x الممكنة؟

TIMSS تفكير إبداعى

11 فى الشكل المقابل: مستطيل بعداه 10 سم، $(2x - 4)$سم:

1. أوجد قيمة x التى تجعل محيط المستطيل = 52 سم.
2. أوجد قيمة x التى تجعل محيط المستطيل أكبر من 40 سم.
3. أوجد قيمة x التى تجعل مساحة المستطيل أقل من 80 سم^2.



12 إذا كانت مجموعة حل المتباينة $a \leqslant \frac{x-1}{2} \leqslant b$ هى $[1 , 7]$ ، فأوجد قيمة $a \times b$

13 إذا كانت: $[\frac{1}{3}a , \frac{1}{3}b]$ هى مجموعة حل المتباينة: $2x + 3 > -x + 1 \geqslant 2x$ ، فأوجد قيمة: a , b

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما مجموعة حل المتباينة: $3 < -x$ فى R؟

(أ) $]-\infty , -3[$ (ب) $]-\infty , 3[$ (جـ) $]-3 , \infty[$ (د) $]3 , \infty[$

2 ما الثانى المتناسب للكميات 3 , 6 , 12؟

(أ) 24 (ب) 6 (جـ) 4 (د) 9

3 إذا كان: $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{4} = \frac{5a - b + 2c}{3k}$ ، فإن: .... = k

(أ) 15 (ب) 21 (جـ) 3 (د) 7

4 ما الثالث المتناسب للعددين: $-3\sqrt{2}$, 12؟

(أ) $-4\sqrt{2}$ (ب) $-36\sqrt{2}$ (جـ) $-24\sqrt{2}$ (د) $-6\sqrt{2}$

5 إذا كان: X, Y مجموعتين غير خاليتين وكان: $n(X^2) = 25$ ، $n(X \times Y) = 10$ ، فإن: .... = $n(Y^2)$

(أ) 15 (ب) 10 (جـ) 2 (د) 4

6 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 8 - 4x$ يقطع محور X فى النقطة ....

(أ) $(8 , 0)$ (ب) $(0 , 8)$ (جـ) $(2 , 0)$ (د) $(0 , 2)$

7 إذا كان: $f(x) = -7$ فإن: .... $= \frac{f(5) + f(-3)}{-2f(1)}$

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) -7 (د) 7

8 ما مجموعة حل المتباينة: $-3 < -x < 5$ فى R؟

(أ) $[-5 , 3]$ (ب) $]-5 , 3[$ (جـ) $[-3 , 5]$ (د) $]-3 , 5[$

9 إذا كان: $f(x) = -x^2$, $g(x) = x + 1$ فما قيمة: $f(-3) + 3g(1)$ ؟

(أ) -9 (ب) 9 (جـ) 3 (د) -3

2 أجب عما يأتى:

1 إذا كان: $\frac{x}{2a + b} = \frac{y}{2b - c} = \frac{z}{2c - a}$ ، **فأثبت أن:** $\frac{2x + y}{4a + 4b - c} = \frac{2x + 2y + z}{3a + 6b}$

2 إذا كانت: a , b , c , d فى تناسب متسلسل، **فأثبت أن:** $\frac{2a^2 + b^2}{2c^2 + d^2} = \left(\frac{a + b}{c + d}\right)^2$

3 إذا كان: $\frac{a - 2b}{5a + b} = \frac{c - 2d}{5c + d}$ **فأثبت أن:** a , b , c , d كميات متناسبة.

4 إذا كانت: $X = \{1 , 2\}$ ، $Y = \{3 , 4 , 5\}$ **فأوجد:** (أ) $Y \times X$ (ب) X^2

5 إذا كانت: $X = \{3 , 4 , 5 , 10 , 13\}$ ، $Y = \{4 , 5 , 7 , 8 , 9 , 19 , 25\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y وكان $x R y$ تعنى "$y = 2x - 1$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (ب) هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟

6 مثل بيانيًا: $f(x) = 5 - 3x$

7 أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات والمتباينات الآتية فى R:

(أ) $2\sqrt{5}\, x - 4 = 6$ (ب) $3(1 + x) - 8 \geqslant 5x + 3$ (جـ) $1 > 3x - 2 \geqslant -5$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ما مجال الدالة: $\{(2,5), (6,7), (9,7)\}$ ؟

(أ) $\{2, 6, 9\}$ (ب) $\{5, 7\}$

(جـ) $\{2, 5, 6, 7, 9\}$ (د) $\{2, 5, 6\}$

2 إذا كان: $n(X \times Y) = 12$, $n(X^2) = 16$ فما قيمة: $n(Y^2)$ ؟

(أ) 192 (ب) 36 (جـ) 9 (د) 3

3 إذا كان سعر سيارة بعد t سنة من شرائها يُعطى بالجنيه بالدالة: $f(t) = 1,200,000 - 50,000t$ فبعد كم سنة يصبح سعر السيارة 800,000 جنيه؟

(أ) 10 (ب) 8 (جـ) 6 (د) 4

4 إذا كانت $f(x) = 3$، فما قيمة $\frac{2f(7)}{7f(2)}$ ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{6}{7}$ (جـ) $\frac{2}{7}$ (د) $\frac{7}{2}$

2 أكمل كلًا مما يأتى:

1 إذا كانت: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{12, 13\}$ وكانت R دالة من X إلى Y حيث $R = \{(1, 12), (3, 13), (k, 12)\}$ فإن: $k =$ ....

2 مجموعة حل المتباينة: $2x + 3 > 15$ فى R هى ....

3 إذا كانت: $f(x) = 2x^2$، فإن $f(4) - f(2) =$ ....

4 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 18 - 4x$ يقطع محور X فى النقطة ....

3 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 **أوجد** مجموعة حل المتباينة: $-3 < 2x + 5 < 13$ فى R

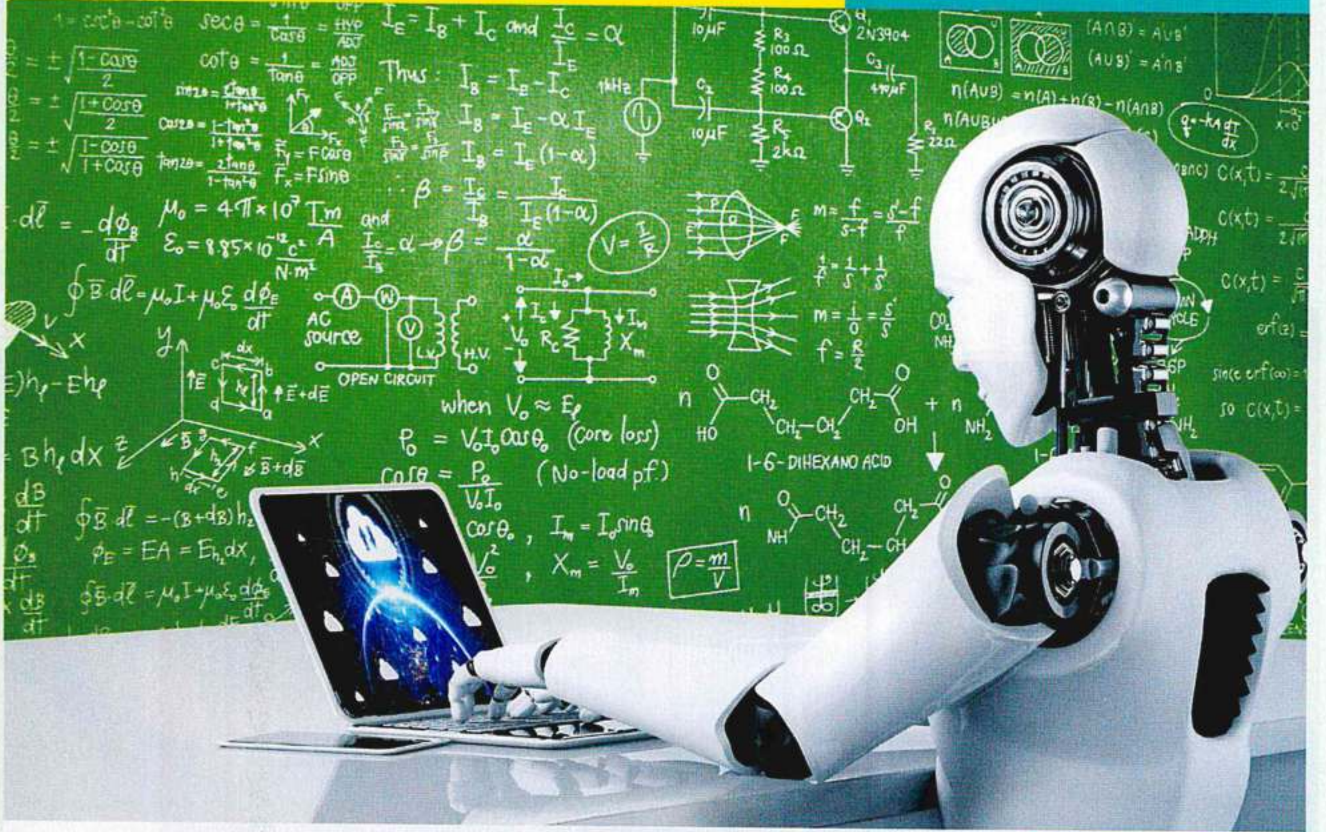
2 **مثل بيانيًا** الدالة f حيث $f(x) = 3x - 1$

3 إذا كانت: $X = \{1, 3, 7\}$, $Y = \{5, 9\}$ **فأوجد:** $X \times Y$ ، Y^2

4 إذا كانت: $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث $x R y$ تعنى "$x + y = 10$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$ فاكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة، ثم مثل العلاقة بالمخطط السهمى موضحًا مجال ومدى العلاقة. هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

الوحدة الثالثة 3

الهندسة



دروس الوحدة

تستخدم النظريات الهندسية فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى، إذ يعتمد الذكاء الاصطناعى على النظريات الهندسية لتحسين دقة الوصول لحل بعض المشكلات الهندسية.

- **فهل يمكن استخدام النظريات الهندسية للوصول إلى حلول لمشكلات أكثر تعقيدًا فى تطبيقات الذكاء الاصطناعى؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

- التواصل الرياضى.
- التفكير الإبداعى.
- التفكير الناقد.
- التنمية المستدامة.

القيم:

- الوعى بممارسة الرياضيات.
- التذوق الجمالى.
- العمل الجماعى.

مُسَلَّمات التباين (Axioms of Inequality)



نواتج التعلم

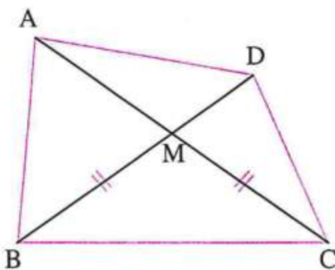
- يعـرف الطـالب مسلمـات التبايـن.
- يستخـدم الطـالب مسلَّمـات التبايـن فى التطبيقات الهندسية.

مفـردات أسـاسـية

- مسلمات التباين (**Axioms of inequality**)



فكر وناقش



فى الشكل المقابل:

$MC = MB$, $m(\angle ABC) > m(\angle BCD)$

فهل $m(\angle ABD) > m(\angle DCA)$؟

- فى هذا الدرس، سوف تتعرف على مسلمات التباين، مما سيمكِّنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

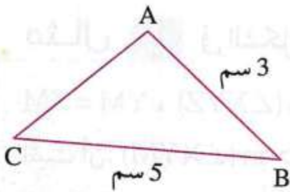
تعلم | مسلمات التباين:

مفهوم التباين:

- **التباين:** يعنى الاختلاف، ونستخدم فيه علامات التباين: (> أو <).
- **علاقة التباين:** هى علاقة تستخدم فى المثلث للمقارنة بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا.

فمثلًا:

1 فى المثلث ABC المقابل:

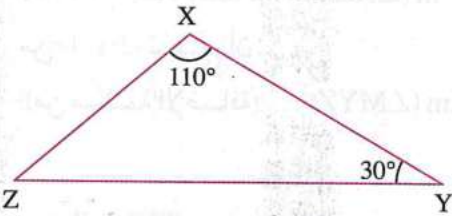


إذا كان: طول $\overline{AB} = 3$ سم ، طول $\overline{CB} = 5$ سم

فإن: $CB > AB$ وتقرأ طول $\overline{CB}$ أكبر من طول $\overline{AB}$

أو $AB < CB$ وتقرأ طول $\overline{AB}$ أقل من طول $\overline{CB}$

2 فى المثلث XYZ المقابل:



إذا كان: $m(\angle X) = 110° , m(\angle Y) = 30°$

فإن: $m(\angle X) > m(\angle Y)$

وتقرأ: قياس زاوية X أكبر من قياس زاوية Y

أو $m(\angle Y) < m(\angle X)$

وتقرأ: قياس زاوية Y أقل من قياس زاوية X

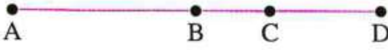
مسلمات التباين:

1 الإضافة	إذا كان: $a < b$ ، فإن: $a + c < b + c$	فمثلًا إذا كان: $5 < 8$ ، فإن: $5 + 4 < 8 + 4$
2 الطرح	إذا كان: $a < b$ ، فإن: $a - c < b - c$	فمثلًا إذا كان: $6 < 7$ ، فإن: $6 - 2 < 7 - 2$
3 الضرب فى عدد موجب	إذا كان: $a < b$ ، c عددًا موجبًا فإن: $a \times c < b \times c$	فمثلًا إذا كان: $5 < 7$ ، فإن: $5 \times 3 < 7 \times 3$
4 علاقة التباين ناقلة	إذا كان: $a < b$ ، $b < c$ فإن: $a < c$	فمثلًا إذا كان: $5 < 7$ ، $3 < 5$ فإن: $3 < 7$
5 المجموع	إذا كان: $a < b$ ، $c < d$ فإن: $a + c < b + d$	فمثلًا إذا كان: $5 < 7$ ، $3 < 4$ فإن: $3 + 5 < 4 + 7$
6 المقارنة بين الكل والجزء	إذا كان: $a = b + c$ حيث c عدد موجب فإن: $a > b$	فمثلًا إذا كان: $7 + 3 = 10$ فإن: $10 > 7$ ، $10 > 3$

معلومة إثرائية

المسلَّمة فى الرياضيات هى عبارة يفترض صحتها بدون إثبات بناءً على مبادئ أساسية.

مثـال 1 فى الشكل المقابل:



إذا كان: $AB > CD$

فأثبت أن: $AC > BD$

الحـل



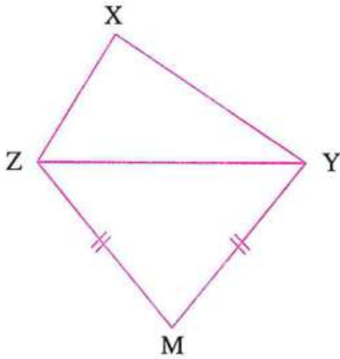
$\because AB > CD$

بإضافة BC إلى الطرفين

(من مسلـمة الإضـافة) $\therefore AB + BC > CD + BC$

$\therefore AC > BD$

مثـال 2 فى الشكل المقابل:



$m(\angle XZY) > m(\angle XYZ)$ ، $YM = ZM$

أثبت أن: $m(\angle XZM) > m(\angle XYM)$

الحـل

فى المثلث YMZ

$\because YM = ZM$

$\therefore m(\angle MZY) = m(\angle MYZ) \longrightarrow (1)$

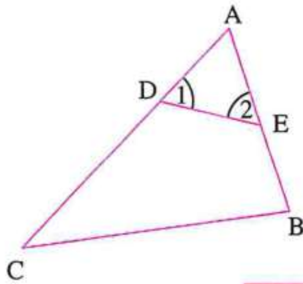
$\because m(\angle XZY) > m(\angle XYZ) \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن:

(من مسلـمة الإضـافة) $m(\angle XZY) + m(\angle MZY) > m(\angle XYZ) + m(\angle MYZ)$

$\therefore m(\angle XZM) > m(\angle XYM)$

مثـال 3 فى الشكل المقابل:



$AC > AB$, $m(\angle 2) = m(\angle 1)$

أثبت أن: $DC > EB$

الحـل

فى المثلث AED

$\because m(\angle 2) = m(\angle 1)$

$\therefore AD = AE \longrightarrow (1)$

$\because AC > AB \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن:

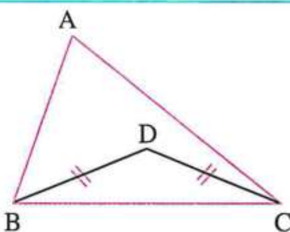
(من مسلـمة الطـرح) $\therefore AC - AD > AB - AE$

$\therefore DC > EB$

تذكـر أن

- إذا تطابقـت زاويتـان فى مثلث، فـإن الضلعـين المقابلـين لهاتين الزاويتين متطابقان.

سؤال 1



فى الشكل المقابل:

ABC مثلث، D نقطة تقع داخل المثلث حيث $DB = DC$

، $m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$

أثبت أن: $m(\angle ABD) > m(\angle ACD)$

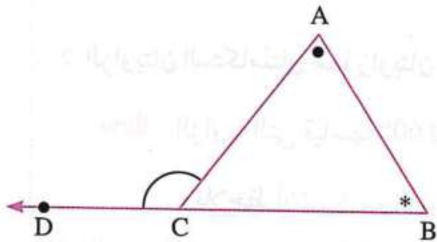


نقاط هامة

- **قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها.**

فمثلاً:

فى الشكل المقابل:



ABC مثلث ، إذا كان $D \in \overrightarrow{BC}$ ، $D \notin \overline{BC}$

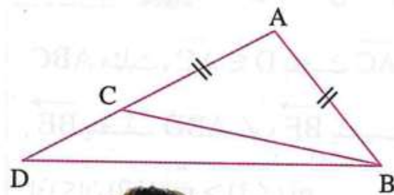
فإن: $\angle ACD$ خارجة عن ΔABC

$\therefore m(\angle ACD) = m(\angle A) + m(\angle B)$

ومن مسلمة المقارنة بين الكل والجزء نستنتج أن:

$m(\angle ACD) > m(\angle A)$, $m(\angle ACD) > m(\angle B)$

مثال 4 فى الشكل المقابل:



إذا كان: $C \in \overline{AD}$ ، $AB = AC$

أثبت أن: $m(\angle ABC) > m(\angle D)$

الحل



فى المثلث ABC

$\because AB = AC$

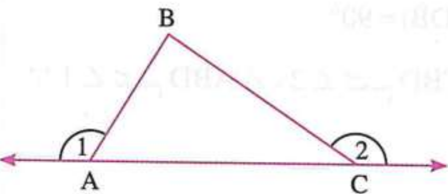
$\therefore m(\angle ACB) = m(\angle ABC) \longrightarrow (1)$

$\because \angle ACB$ خارجة عن ΔDCB

$\therefore m(\angle ACB) > m(\angle D) \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن: $m(\angle ABC) > m(\angle D)$

مثال 5 فى الشكل المقابل:



أثبت أن: $m(\angle 1) + m(\angle 2) > 180^\circ$

الحل

$\because m(\angle 1) = m(\angle B) + m(\angle BCA)$,

$m(\angle 2) = m(\angle B) + m(\angle BAC)$

$\therefore m(\angle 1) + m(\angle 2) = m(\angle B) + m(\angle BCA) + m(\angle BAC) + m(\angle B)$

$\therefore m(\angle 1) + m(\angle 2) = 180^\circ + m(\angle B)$

وحيث إن $m(\angle B) > 0$ فمن مسلمة المقارنة بين الكل والجزء نستنتج أن:

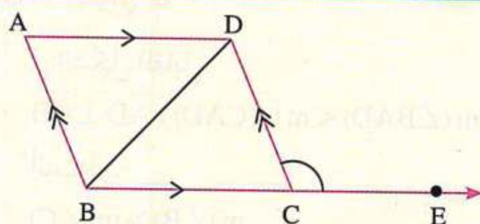
$\therefore m(\angle 1) + m(\angle 2) > 180^\circ$

تذكر أن

- قياس الزاويــة الخارجة عن المثلث تساوى مجموع قياســى الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها.

س؟ سؤال 2

فى الشكل المقابل:



ABCD متوازى أضلاع، $E \in \overrightarrow{BC}$ ، $E \notin \overline{BC}$

أثبت أن:

$m(\angle DCE) > m(\angle DBA)$



تذكر أن

1 الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوى $90°$

فمثلاً: الزاوية التى قياسها $30°$ تتممها زاوية قياسها $60°$، والزاوية التى قياسها $75°$ تتممها زاوية قياسها $15°$

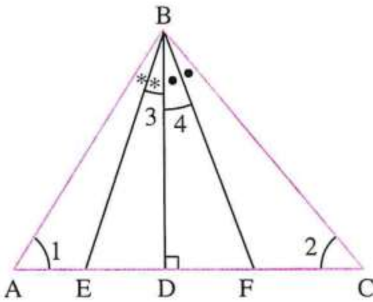
ونلاحظ أن: متممة الزاوية الأصغر فى القياس أكبر من متممة الزاوية الأكبر فى القياس.

2 الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوى $180°$

فمثلاً: الزاوية التى قياسها $60°$ تكملها زاوية قياسها $120°$، والزاوية التى قياسها $80°$ تكملها زاوية قياسها $100°$

ونلاحظ أن: مكملة الزاوية الأصغر فى القياس أكبر من مكملة الزاوية الأكبر فى القياس.

مثال 6 فى الشكل المقابل:



ABC مثلث، $D \in \overline{AC}$ بحيث $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\overrightarrow{BE}$ ينصف $\angle ABD$ ، $\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle CBD$،

إذا كان $m(\angle 1) > m(\angle 2)$

فأثبت أن:

$m(\angle 3) < m(\angle 4)$

الحـل



$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle CDB) = 90°$

$\because$ $\angle 1$ تتمم $\angle ABD$ ، $\angle 2$ تتمم $\angle CBD$

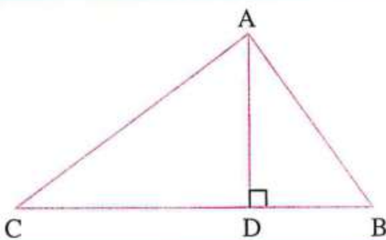
$\because m(\angle 1) > m(\angle 2)$

$\therefore m(\angle ABD) < m(\angle CBD)$

$\therefore \frac{1}{2} m(\angle ABD) < \frac{1}{2} m(\angle CBD)$ مسلمة الضرب فى عدد موجب

$\therefore m(\angle 3) < m(\angle 4)$

سؤال 3



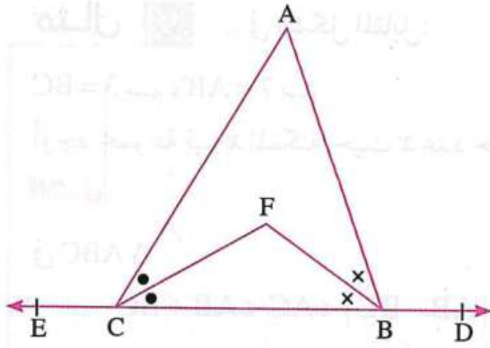
فى الشكل المقابل:

$\overline{AD} \perp \overline{CB}$ ، $m(\angle BAD) < m(\angle CAD)$

أثبت أن:

$m(\angle B) > m(\angle C)$

مثـال 7 فى الشكل المقابل:



$E \notin \overline{BC}$ ، $E \in \overrightarrow{BC}$ ، $D \notin \overline{CB}$ ، $D \in \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle ABC$ ، $\overrightarrow{CF}$ ينصف $\angle ACB$

، $m(\angle ABD) < m(\angle ACE)$

أثبـت أن: $m(\angle ABF) > m(\angle ACF)$

الحـل

$\because D \in \overleftrightarrow{CB}$ $\qquad \therefore m(\angle CBD) = 180°$

$\therefore \angle ABC$ تكمل $\angle ABD$

$\because E \in \overleftrightarrow{CB}$ $\qquad \therefore m(\angle ECB) = 180°$

$\therefore \angle ACB$ تكمل $\angle ACE$

$\because m(\angle ABD) < m(\angle ACE) \longrightarrow (1)$

$\therefore m(\angle ABC) > m(\angle ACB) \longrightarrow (2)$

$\therefore \frac{1}{2} m(\angle ABC) > \frac{1}{2} m(\angle ACB) \longrightarrow (3)$

مسلمة الضرب فى عدد موجب

من (1) ، (2) ، (3) نستنتج أن:

$\therefore m(\angle ABF) > m(\angle ACF)$

لاحظ أن

$\because \overrightarrow{BF}$ ينصف $\angle ABC$

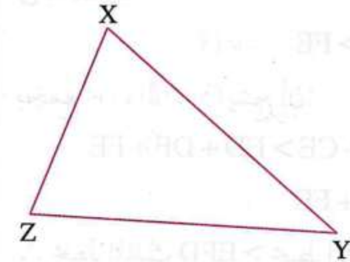
$\therefore m(\angle ABF) = \frac{1}{2} m(\angle ABC)$

$\because \overrightarrow{CF}$ ينصف $\angle ACB$

$\therefore m(\angle ACF) = \frac{1}{2} m(\angle ACB)$

تذكـر أن

1 **مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث (متباينة المثلث).**



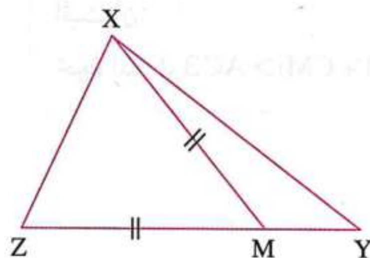
فمثلاً: فى المثلث XYZ المقابل يكون:

- $XY + YZ > XZ$
- $XY + XZ > ZY$
- $ZY + ZX > XY$

2 **طول أى ضلع فى المثلث أكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعها.**

$$|XY - XZ| < ZY < XY + XZ$$

مثـال 8 فى الشكل المقابل:



إذا كان: $M \in \overline{ZY}$

، $XM = ZM$

أثبـت أن: $ZY > XY$

الحـل

فى ΔXMY

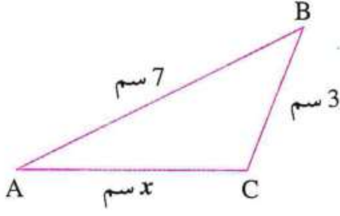
$\because XM + MY > XY \longrightarrow (1)$

$\because XM = ZM \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن:

$\therefore ZM + MY > XY$ $\qquad \therefore ZY > XY$

مثـال 9 في الشكل المقابل:



$BC = 3$ سم ، $AB = 7$ سم

أوجد مجموعة قيم x الممكنة (حيث x عدد حقيقى موجب)

الحـل

في ΔABC

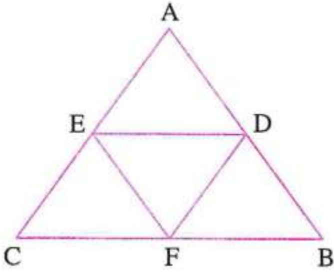
$\because |AB - BC| < AC < AB + BC$

$\therefore |7 - 3| < x < 7 + 3$

$\therefore 4 < x < 10$

$\therefore x \in]4 , 10[$

مثـال 10 من الشكل المقابل:



أثبت أن:

محيط المثلث EFD < محيط المثلث ABC

الحـل

في ΔAED

$\because AE + AD > ED \longrightarrow (1)$

في ΔBFD

$\because BD + BF > FD \longrightarrow (2)$

في ΔCFE

$\because CF + CE > FE \longrightarrow (3)$

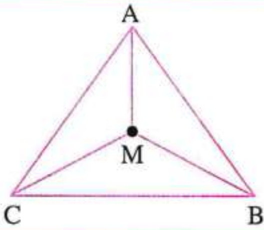
بجمع (1) ، (2) ، (3) ينتج أن:

$\therefore AE + AD + BD + BF + CF + CE > ED + DF + FE$

$\therefore AB + BC + AC > ED + DF + FE$

$\therefore$ محيط المثلث EFD < محيط المثلث ABC

سؤال 4



في الشكل المقابل:

أثبت أن:

محيط المثلث ACB < $2(AM + MB + CM)$

تدرّب الدرس 1

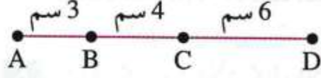
مسلمات التباين (Axioms of inequality)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲ تقييم ▲ ابتكار

أسئلة الكتاب المدرسى

مسلمات التباين

1 أكمل ما يأتى مستخدمًا إحدى العلامتين (> أو <):

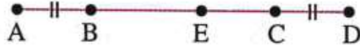


1 فى الشكل المقابل:

(ا) AC .... BD (ب) BD .... AD

(جـ) BC + CD .... AB + BC (د) BD − BC .... AC − BC

(هـ) CD .... AB + BC



2 فى الشكل المقابل:

إذا كان: AB = CD ، BE > EC

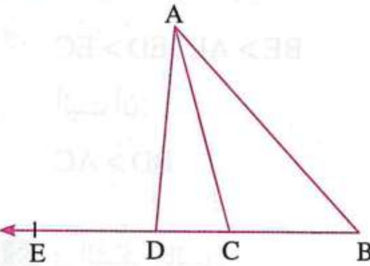
فإن: ED .... AE



3 فى الشكل المقابل:

إذا كان: XY + YZ = ZL + LM ، YZ > ZL

فإن: LM .... XY



4 فى الشكل المقابل:

(ا) m (∠CAD) .... m (∠ADE)

(ب) m (∠ACB) .... m (∠ADC)

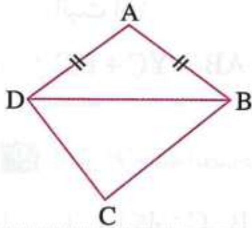
(جـ) m (∠ABC) .... m (∠ACD)

5 إذا كان: X > Y ، Y > Z ، فإن: Z X

6 قياس الزاوية الخارجة عن المثلث .... قياس أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها.

---

2 فى الشكل المقابل:



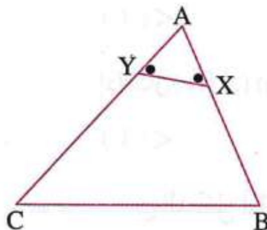
AD = AB , m (∠DBC) < m (∠CDB)

أثبت أن:

m (∠ABC) < m (∠ADC)

---

3 فى الشكل المقابل:



ABC مثلث فيه AC > AB

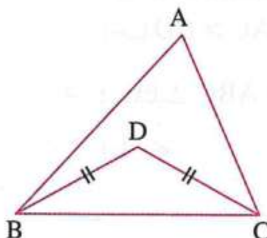
، $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{AC}$

m (∠AXY) = m (∠AYX)

أثبت أن: YC > XB

---

4 فى الشكل المقابل:

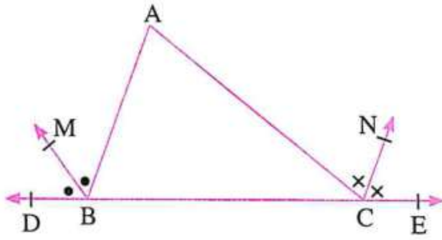


DB = DC , m (∠ABC) < m (∠ACB)

أثبت أن:

m (∠ACD) > m (∠ABD)

5 في الشكل المقابل:



$m(\angle ABC) > m(\angle ACB)$ ، $\overrightarrow{BM}$ ينصف $\angle ABD$ ،

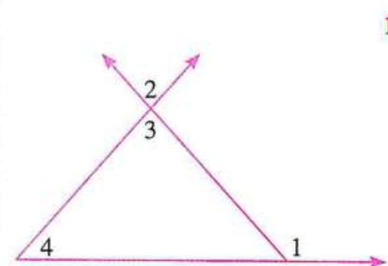
$\overrightarrow{CN}$ ينصف $\angle ACE$

أثبت أن:

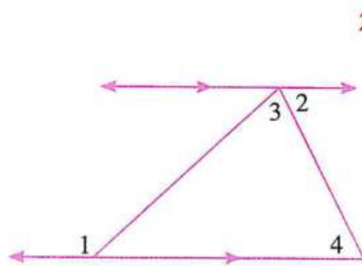
$m(\angle ABM) < m(\angle ACN)$

6 في كل من الأشكال الآتية، وضح: لماذا $m(\angle 1) > m(\angle 2)$؟

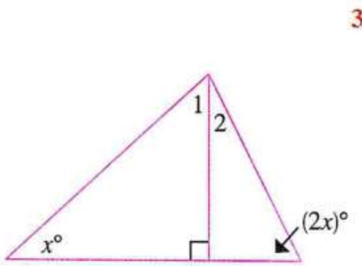
1



2



3



7 في الشكل المقابل:

$BE > AE , ED > EC$

أثبت أن:

$BD > AC$

8 في الشكل المقابل:

ABCD متوازى أضلاع فيه:

$DX < BY$

أثبت أن:

$AX + AB > YC + DC$

9 اختر الإجابة الصحيحة:

1 **إذا كان:** A , B , C ثلاثة أعداد موجبة وكان $A > B$، فإن $A + C$ .... $B + C$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

2 **إذا كان:** $m(\angle A) > m(\angle B)$، فإن مكملة $(\angle A)$ .... مكملة $(\angle B)$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

3 **في الشكل المقابل: أى من العبارات الآتية صحيح؟** ....

4 سم 3 سم A B C D

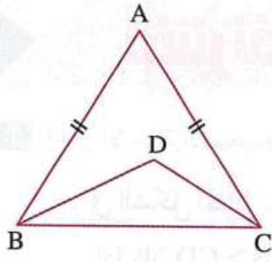
(أ) $AB < CD$ (ب) $AC < BD$

(جـ) $AC > BD$ (د) $AC = BD$

4 فى المثلث ABC إذا كان $AC > AB$ ، $BC > AC$، فإن BC .... AB

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

5 فى الشكل المقابل:



$m(\angle DBC) < m(\angle DCB)$ ، $AB = AC$

فأى مما يأتى صحيح؟ ....

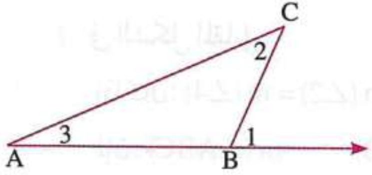
(أ) $m(\angle ABC) < m(\angle ACB)$

(ب) $m(\angle ACD) < m(\angle ABD)$

(جـ) $m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

(د) $m(\angle ACD) = m(\angle ABD)$

6 فى الشكل المقابل:



إذا كان: $m(\angle 2) > m(\angle 3)$، فأى مما يأتى صحيح؟ ....

(أ) $m(\angle 1) > m(\angle 2) > m(\angle 3)$

(ب) $m(\angle 2) > m(\angle 3) > m(\angle 1)$

(جـ) $m(\angle 2) > m(\angle 1) > m(\angle 3)$

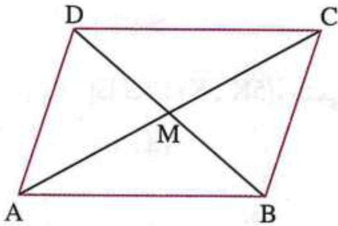
(د) $m(\angle 1) > m(\angle 3) > m(\angle 2)$

7 ABC مثلث فيه $AB = AC$ ، $m(\angle A) < m(\angle B)$،

فإن: $m(\angle C)$ .... $m(\angle A)$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

8 فى الشكل المقابل:

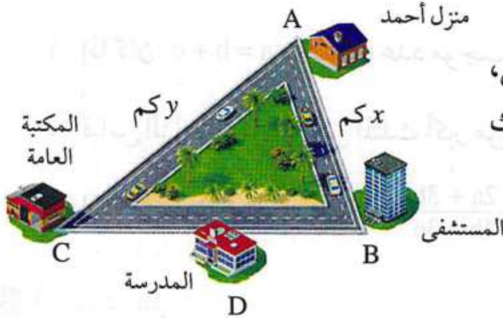


ABCD متوازى أضلاع، $AC > BD$، فأى مما يأتى صحيح؟ ....

(أ) $MC < MD$ (ب) $MC = MD$

(جـ) $MC < MB$ (د) $MC > MB$

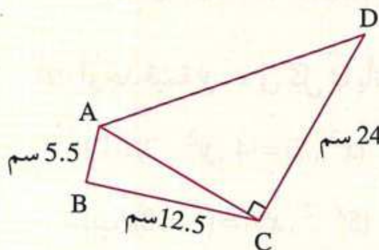
10 فى الشكل المقابل:



إذا كانت المدرسة تقع فى منتصف المسافة بين المكتبة العامة والمستشفى، وكان $3x = 2y$، أراد أحمد أن يذهب من منزله إلى المدرسة بحيث يسلك الطريق الأقصر، حدد المسار الذى يسلكه أحمد.

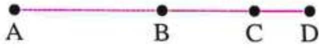
TIMSS تفكير إبداعى

11 فى الشكل المقابل:



أوجد مجموعة القيم الممكنة لطول كل من $\overline{AC}$, $\overline{AD}$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

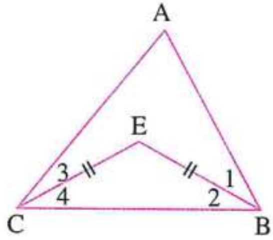


1 فى الشكل المقابل:

إذا كان $AB > CD$، فإن AC .... DB

(أ) $<$ (ب) $>$

(جـ) $=$ (د) غير ذلك



2 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $m(\angle 1) > m(\angle 3)$, $m(\angle 2) = m(\angle 4)$

فإن: $m(\angle ABC)$ .... $m(\angle ACB)$

(أ) $>$ (ب) $<$

(جـ) $=$ (د) غير ذلك

3 إذا كان: A ، B ، C أعدادًا موجبة، وكان $A > B$، فإن $B - C$ .... $A - C$

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

4 إذا كان: $m(\angle A) > m(\angle B)$، حيث A , B زاويتان حادتان، فإن متممة $(\angle A)$ .... متممة $(\angle B)$

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

5 إذا كان: $(5K, K)$، ينتمى للدالة f حيث $f(x) = 3x + 14$، فما قيمة K؟ ....

(أ) 14 (ب) 10 (جـ) -7 (د) -1

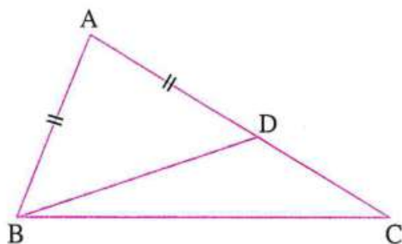
2 أكمل ما يأتى:

1 **إذا كان:** $a = b + c$ ، حيث c عدد موجب، فإن: b .... a

2 قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من ....

3 **إذا كان:** $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = 3$، فإن قيمة $\frac{2a + 3b}{4b - 3c}$ تساوى ....

3 أجب عما يأتى:



1 فى الشكل المقابل:

$AB = AD$, $C \in \overrightarrow{AD}$

أثبت أن: $m(\angle ABD) > m(\angle C)$

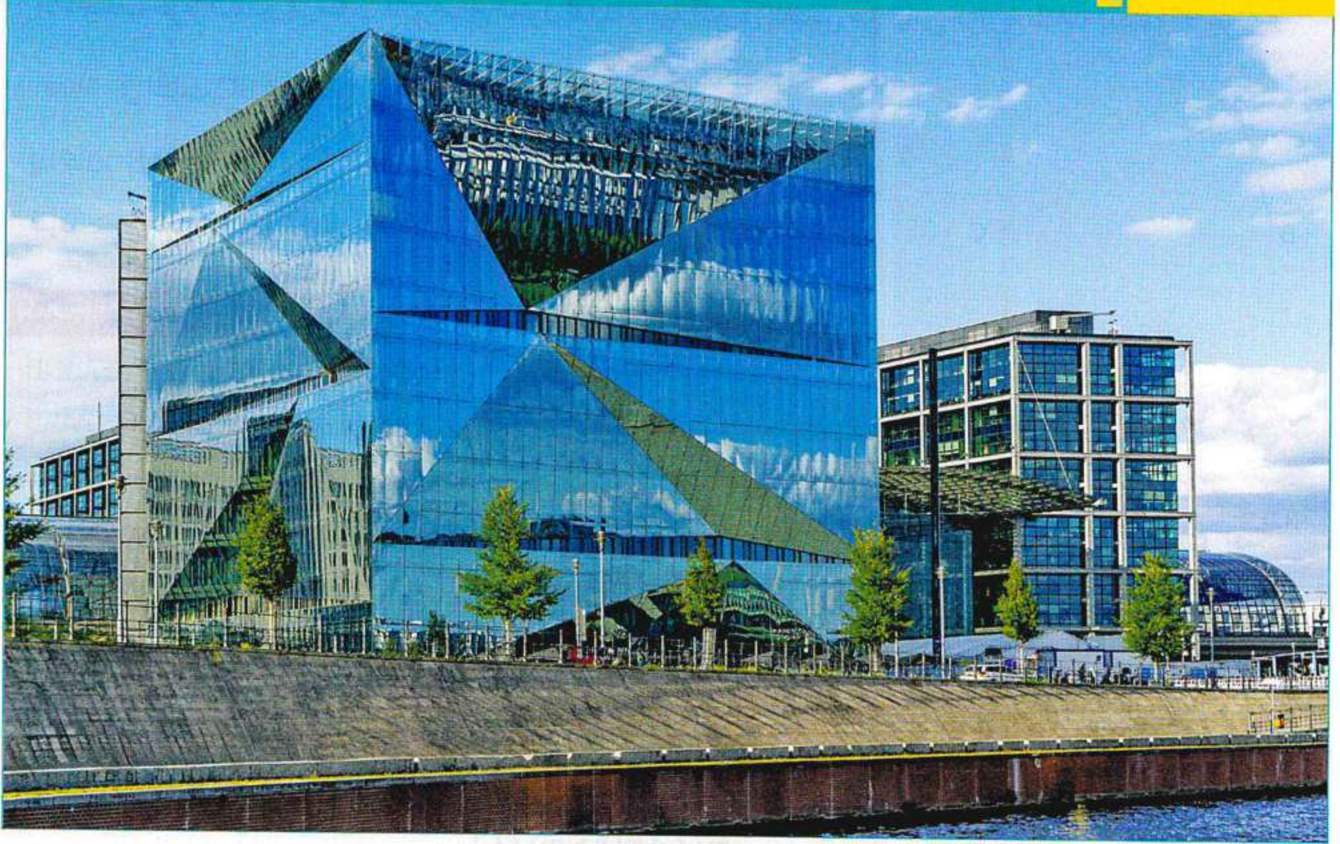
2 **أوجد قيمة x ، y فى كل مما يأتى:**

(أ) $(x^2, 7) = (4, y^2 - 2)$

(ب) $(5^{x-2}, xy) = (1, 18)$

ذاكر الدرس 2

التباين فى المثلثات الجزء 1
(Inequality in Triangles)



نواتج التعلم



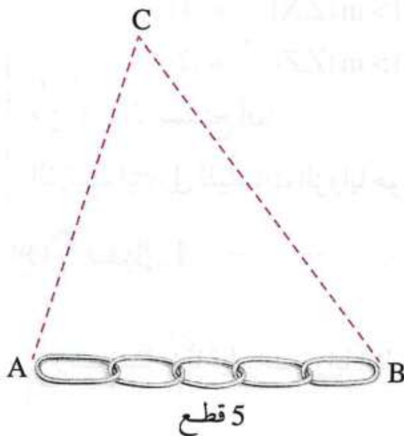
- يعرف الطالب نظريات التباين فى مثلث واحد.
- يستخدم الطالب نظريات التباين فى المثلثات فى حل المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية
- التبايـن (**Inequality**)

فكر وناقش



- أرادت سارة تكويـن المثلـث ABC باستخـدام سلسلة مكونة من 15 قطعة متصلة بحيث تكون القطع متساوية فى الطول على أن يكون المثلث مختلف الأضلاع، وفيـه $m(\angle A) > m(\angle B)$





فما عدد القطع المناسب لكل من الضعلين $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ ؟

ناقش الاحتمالات المختلفة.

- **فى هذا الـدرس، سوف تتعرف على نظريـات التباين فى مثلـث، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكـلات الحياتية.**

تعلم **التباين فى المثلث:**

نظرية:

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.

فمثلًا: فى المثلث ABC المقابل:

إذا كان: $AC > AB$

فـإن : $m(\angle B) > m(\angle C)$

إثبات صحة النظرية:

المعطيات: ABC مثلث فيه: $AC > AB$

المطلوب: **إثبات أن:** $m(\angle ABC) > m(\angle C)$

العمل والبرهان: نضع $D \in \overline{AC}$ بحيث $AB = AD$، ونرسم $\overline{BD}$

فى ΔABD

$\because AB = AD$

$\therefore m(\angle ADB) = m(\angle ABD) \longrightarrow (1)$

$\because \angle ADB$ خارجة عن ΔBDC

$\therefore m(\angle ADB) > m(\angle C) \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن:

$m(\angle ABD) > m(\angle C)$

$\because m(\angle ABC) > m(\angle ABD)$

$\therefore m(\angle ABC) > m(\angle C)$ **علاقة التباين ناقلة**

مثـال 1 فى الشكل المقابل:

رتب قياسات زوايا ΔXYZ تنازليًا.

الحـل

فى ΔXYZ

$\because XZ > ZY \quad \therefore m(\angle Y) > m(\angle X) \longrightarrow (1)$

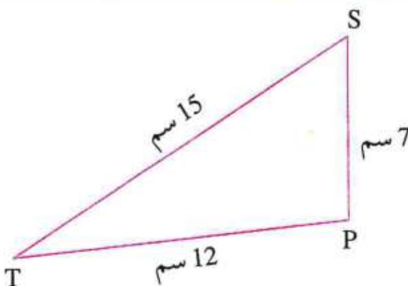
$\because ZY > XY \quad \therefore m(\angle X) > m(\angle Z) \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن:

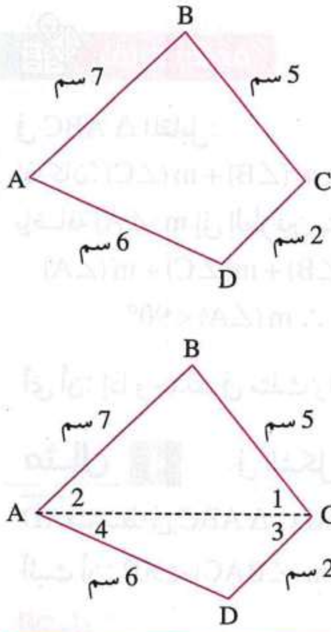
الترتيب التنازلى لقياسات الزوايا هو: $m(\angle Y)\ ,\ m(\angle X)\ ,\ m(\angle Z)$

سؤال 1

رتب تصاعديًا قياسات زوايا المثلث STP



مثـال 2 فى الشكل المقابل:



$AB = 7$ سم ، $BC = 5$ سم ، $AD = 6$ سم ، $DC = 2$ سم

أثبت أن: $m(\angle BCD) > m(\angle BAD)$

الحـل

العمل والبرهان: نرسم $\overline{AC}$

فى ΔABC

$\because AB > BC \qquad \therefore m(\angle 1) > m(\angle 2) \longrightarrow (1)$

فى ΔADC

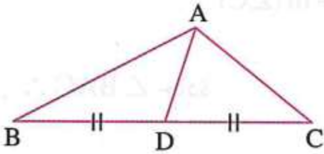
$\because AD > DC \qquad \therefore m(\angle 3) > m(\angle 4) \longrightarrow (2)$

بجمع (1) ، (2) نستنتج أن:

$m(\angle 1) + m(\angle 3) > m(\angle 2) + m(\angle 4)$

$\therefore m(\angle BCD) > m(\angle BAD)$

نقاط هامة



فى ΔABC المقابل:

إذا كان: $m(\angle A) > m(\angle B) + m(\angle C)$

وبإضافة $m(\angle A)$ إلى الطرفين ينتج أن:

$m(\angle A) + m(\angle A) > m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle A)$

$\therefore 2\,m(\angle A) > 180° \qquad \therefore m(\angle A) > 90°$

أى أن: إذا وجدت فى مثلث زاوية قياسها أكبر من مجموع قياسى الزاويتين الأخريين، فإن هذه الزاوية تكون منفرجة.

مثـال 3 فى الشكل المقابل:

D منتصف $\overline{BC}$ ، $BD > AD$

أثبت أن: $\angle BAC$ منفرجة

الحـل

فى ΔADB:

$\because BD > AD \qquad \therefore m(\angle BAD) > m(\angle B) \longrightarrow (1)$

$\because BD = CD \qquad \therefore CD > AD$

فى ΔADC:

$\because DC > AD \qquad \therefore m(\angle DAC) > m(\angle C) \longrightarrow (2)$

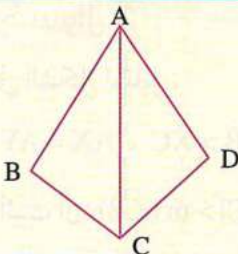
بجمع (1) ، (2) نستنتج أن: $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) > m(\angle B) + m(\angle C)$

$\therefore m(\angle BAC) > m(\angle B) + m(\angle C)$

$\therefore \angle BAC$ منفرجة



سؤال 2

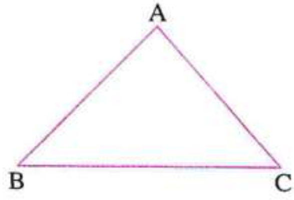


فى الشكل المقابل:

$AB > BC$ ، $AD > CD$

أثبت أن: $m(\angle BCD) > m(\angle BAD)$

نقاط هامة



فى Δ ABC المقابل:

إذا كان: $m(\angle A) < m(\angle B) + m(\angle C)$

بإضافة $m(\angle A)$ إلى الطرفين ينتج:

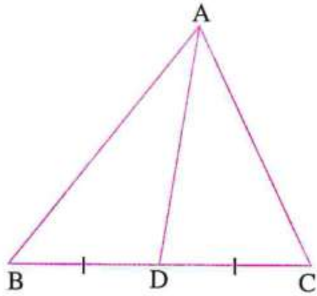
$$m(\angle A) + m(\angle A) < m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle A)$$

$\therefore 2\,m(\angle A) < 180^\circ \qquad \therefore m(\angle A) < 90^\circ$

أى أن: إذا وجدت فى مثلث زاوية قياسها أقل من مجموع قياسى الزاويتين الأخريين، فإن هذه الزاوية تكون حادة.

مثـال 4

فى الشكل المقابل:



$\overline{AD}$ متوسط فى Δ ABC ، $BC < 2AD$

أثبت أن: $m(\angle BAC) < 90^\circ$

الحـل

$\because BC < 2AD \qquad \therefore \frac{1}{2}BC < AD \longrightarrow (1)$

$\because$ D منتصف $\overline{BC}$

$\because BD = \frac{1}{2}BC \quad , \quad DC = \frac{1}{2}BC \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) ينتج أن:

$\therefore BD < AD \quad , \quad DC < AD$

فى Δ ABD:

$\because BD < AD \qquad \therefore m(\angle BAD) < m(\angle B) \longrightarrow (3)$

فى Δ ADC:

$\because DC < AD \qquad \therefore m(\angle DAC) < m(\angle C) \longrightarrow (4)$

بجمع (3) ، (4) ينتج أن:

$\therefore m(\angle BAD) + m(\angle DAC) < m(\angle B) + m(\angle C)$

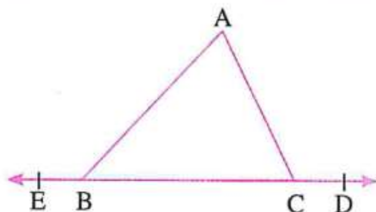
$\therefore m(\angle BAC) < m(\angle B) + m(\angle C)$

$\therefore \angle BAC$ حادة

$\therefore m(\angle BAC) < 90^\circ$

مثـال 5

فى الشكل المقابل:



إذا كان: $AB > AC$

فأثبت أن: $m(\angle ABE) > m(\angle ACD)$

الحـل

$\because AB > AC$

$\therefore m(\angle ACB) > m(\angle ABC)$

$\therefore m(\angle ABE) > m(\angle ACD)$

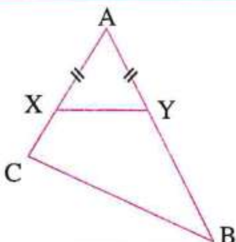


تذكر أن

- مكملة الزاوية الأصغر فى القياس أكبر من مكملة الزاوية الأكبر فى القياس.

س سؤال 3

فى الشكل المقابل:

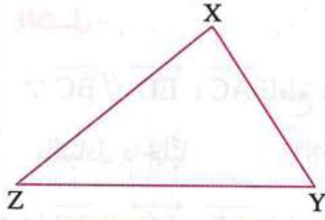


$YB > XC$ ، $AX = AY$

أثبت أن: $m(\angle C) > m(\angle B)$

عكس النظرية:

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الأخرى.

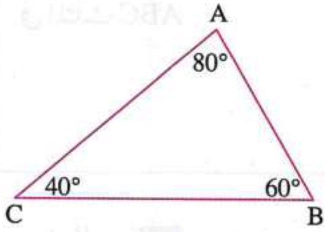


فى ΔXYZ المقابل:

إذا كان: $m(\angle Y) > m(\angle Z)$

فإن: $XZ > XY$

مثال 6 فى الشكل المقابل:



رتب تنازليًا أطوال أضلاع المثلث ABC

الحل

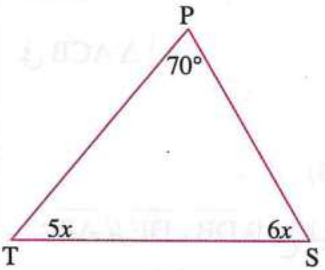
$\because m(\angle A) > m(\angle B)$ $\therefore BC > AC$

$\because m(\angle B) > m(\angle C)$ $\therefore AC > AB$

$\therefore BC > AC > AB$

∴ الترتيب التنازلى لأطوال أضلاع المثلث ABC هو: BC , AC , AB

مثال 7 فى الشكل المقابل:



رتب تصاعديًا أطوال أضلاع المثلث PST

الحل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\therefore 5x + 6x + 70° = 180°$

$\therefore 11x = 180° - 70°$

$\therefore \frac{11x}{11} = \frac{110°}{11}$

$\therefore x = 10°$

$\therefore m(\angle T) = 5 \times 10° = 50°$, $m(\angle S) = 6 \times 10° = 60°$

$\because m(\angle T) < m(\angle S)$ $\therefore PS < PT$

$\because m(\angle S) < m(\angle P)$ $\therefore PT < ST$

$\therefore PS < PT < ST$

∴ الترتيب التصاعدى لأطوال أضلاع المثلث PST هو: PS , PT , ST

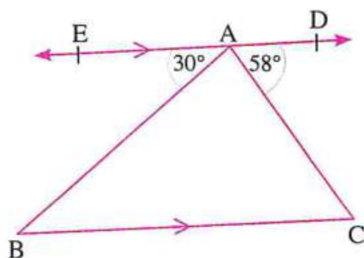


سؤال 4

المثلث ABC فيـه: $m(\angle B) = 40°$ ، $m(\angle A) = 50°$

رتب **تصاعديًا** أطوال أضلاع المثلث ABC

مثـال 8 في الشكل المقابل:



أثبت أن: $AB > AC$

الحـل

$\because \overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ ، $\overline{AC}$ قاطع لهما

$\therefore m(\angle C) = m(\angle DAC) = 58°$ **بالتبادل داخليًا**

$\because \overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ ، $\overline{AB}$ قاطع لهما

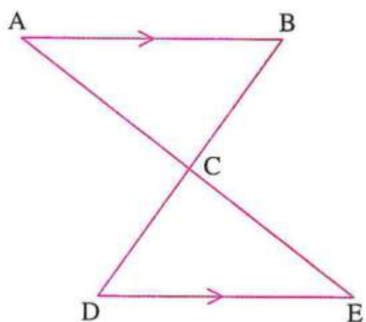
$\therefore m(\angle B) = m(\angle EAB) = 30°$ **بالتبادل داخليًا**

في المثلث ABC

$\because m(\angle C) > m(\angle B)$

$\therefore AB > AC$

مثـال 9 في الشكل المقابل:



$AC > CB$

أثبت أن: $CE > DC$

الحـل

في ΔACB

$\because AC > CB$

$\therefore m(\angle B) > m(\angle A) \longrightarrow (1)$

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{DB}$ قاطع لهما

$\therefore m(\angle D) = m(\angle B) \longrightarrow (2)$ **بالتبادل داخليًا**

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ، $\overline{AE}$ قاطع لهما

$\therefore m(\angle E) = m(\angle A) \longrightarrow (3)$ **بالتبادل داخليًا**

من (1) ، (2) ، (3) نستنتج أن:

$m(\angle D) > m(\angle E)$

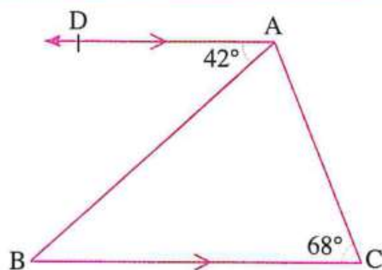
$\therefore CE > DC$



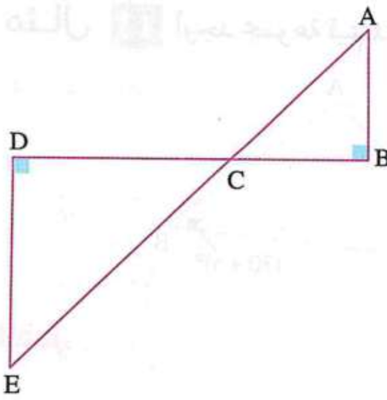
س؟ سؤال 5

في الشكل المقابل:

أثبت أن $BC > AC$



مثـال 10 فى الشكل المقابل:



$m(\angle B) = m(\angle D) = 90^\circ$

أثبت أن: $AE > BD$

الحـل

فى ΔABC

$\because m(\angle B) = 90^\circ$

$\therefore AC > BC \longrightarrow (1)$

فى ΔEDC

$\because m(\angle D) = 90^\circ$

$\therefore EC > DC \longrightarrow (2)$

بجمع (1) ، (2) نستنتج أن:

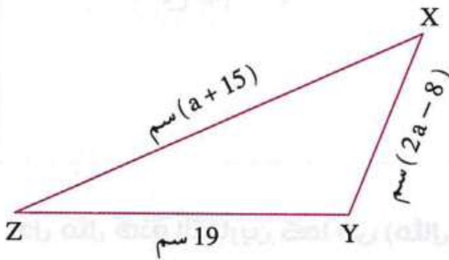
$AC + EC > BC + DC$

$\therefore AE > BD$

لاحظ أن

- فى المثلث القائم الزاوية الوتر هو أكبر أضلاع المثلث طولًا.
- فى المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولًا.

مثـال 11 فى الشكل المقابل:



$XZ = (a + 15)$ سم ، $XY = (2a - 8)$ سم ، $ZY = 19$ سم

أوجد مجموعة قيم a التى تجعل $m(\angle Z) < m(\angle Y)$

الحـل

فى ΔXYZ

$\because XZ + XY > ZY$ (متباينة المثلث)

$\therefore a + 15 + 2a - 8 > 19$

$\therefore 3a + 7 > 19$ $\therefore 3a > 19 - 7$

$\therefore 3a > 12$ $\therefore a > 4$

$\because m(\angle Z) < m(\angle Y)$ $\therefore XY < XZ$

$\therefore 2a - 8 < a + 15$ $\therefore 2a - a < 15 + 8$

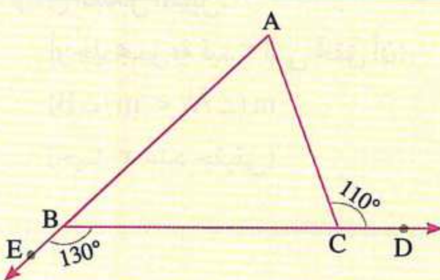
$\therefore a < 23$

$\therefore 4 < a < 23$ $\therefore a \in]4, 23[$



سؤال 6

فى الشكل المقابل:



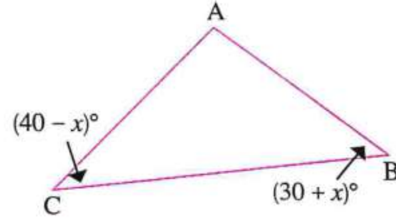
$E \in \overrightarrow{AB}$ ، $D \in \overrightarrow{BC}$ ،

$m(\angle EBC) = 130^\circ$ ، $m(\angle ACD) = 110^\circ$

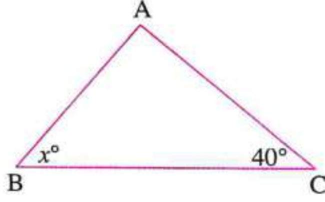
أثبت أن: $AB > AC$

مثـال 12 أوجد مجموعة قيم x التى تجعل $AC > AB$ فى كل مما يأتى (حيث x عدد حقيقى):

1



2



الحـل

1

$\because AC > AB$

$\therefore m(\angle B) > m(\angle C)$

$\therefore 30 + x > 40 - x$ $\quad$ $\therefore x + x > 40 - 30$

$\therefore 2x > 10$ $\quad$ $\therefore x > 5$

$\because m(\angle C) > 0$

$\therefore 40 - x > 0$ $\quad$ $\therefore x < 40$

$m(\angle B) > 0$ محققة لجميع قيم x حيث $x > 5$

$\therefore 5 < x < 40$

$\therefore x \in]5, 40[$

2

$\because AC > AB$

$\therefore x > 40$

$\because m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle A) = 180°$

$\therefore m(\angle B) + m(\angle C) < 180°$

$\therefore x + 40 < 180$

$\therefore x < 180 - 40$

$\therefore x < 140$

$\because 40 < x < 140$

$\therefore x \in]40, 140[$

لحل مثل هذه التمارين كما فى (مثال 12) يجب مراعاة ما يلى:

- الشرط المعطى فى التمرين.
- قياس أى زاوية فى المثلث أكبر من $0°$
- مجموع قياس أى زاويتين فى المثلث أقل من $180°$

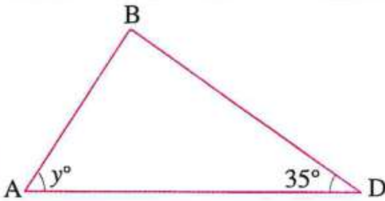
س؟ سؤال 7

1 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم y التى تجعل:

$AB < BD$

(حيث y عدد حقيقى)

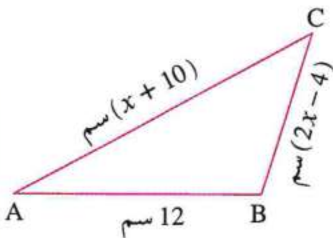


2 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x التى تحقق أن:

$m(\angle A) < m(\angle B)$

(حيث x عدد حقيقى)



أسئلة الكتاب المدرسى

التباين فى المثلث:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 فى المثلث XYZ إذا كان $YZ < XY$ فإن: $m(\angle X)$ .... $m(\angle Z)$

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

2 فى المثلث ABC إذا كان $AB = 7$ سم، $BC = 8$ سم فإن: $m(\angle C)$ .... $m(\angle A)$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

3 فى المثلث ABC إذا كان $AB = \frac{1}{2} BC$ فإن: $m(\angle A)$ .... $m(\angle C)$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

4 فى المثلث ABC يكون: 0 .... $AB + BC - AC$

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

5 فى المثلث ABC القائم الزاوية فى B يكون AC .... AB

(أ) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

6 فى ΔLMN إذا كان $m(\angle M) > m(\angle L)$ ، فإن: NM .... NL

(أ) $\leq$ (ب) $<$ (جـ) $>$ (د) $=$

7 فى ΔXYZ إذا كان $\angle Z$ منفرجة، فإن: XZ .... XY

(أ) $\leq$ (ب) $>$ (جـ) $<$ (د) $=$

8 فى ΔXYZ ، $m(\angle X) = 50°$ ، $m(\angle Y) = 60°$، فأى مما يلى صحيح؟ ....

(أ) $XZ > ZY$ (ب) $XZ > XY$ (جـ) $XY < ZY$ (د) $ZY > ZX$

9 فى ΔABC ، $m(\angle B) = 30°$ ، $m(\angle A) = 70°$، فأى مما يلى صحيح؟ ....

(أ) $AB < AC$ (ب) $BC < AC$ (جـ) $AB > AC$ (د) $AB < CB$

10 فى ΔADC ، $m(\angle D) = 110°$ ، $m(\angle A) = 30°$، فإن ....

(أ) $AC > DC$ (ب) $AC > AD$ (جـ) $DC < AD$ (د) جميع ما سبق

11 فى ΔABD ، $m(\angle D) = 130°$، فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

(أ) $\overline{AB}$ (ب) $\overline{BD}$ (جـ) $\overline{AD}$ (د) لا شىء مما سبق

2 أكمل ما يأتى:

1 إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله ....

2 إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ....

3 فى ΔABC إذا كان $\angle A$ منفرجة فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

4 فى ΔXYZ إذا كان $m(\angle X) = 30°$ ، $m(\angle Y) = 70°$، فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

5 ABC مثلث قائم الزاوية فى B، فيه $m(\angle A) = 60°$، فإن أصغر أضلاع المثلث طولًا هو ....

6 إذا كان ADB مثلثًا فيه $m(\angle A) = m(\angle B) + m(\angle D)$ ، فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

7 إذا كان XYZ مثلثًا فيه $m(\angle X) > m(\angle Y) + m(\angle Z)$ ، فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

3 رتب قياسات زوايا Δ ABC تبعًا للمطلوب:

1 AB = 7 سم ، BC = 5 سم ، AC = 6 سم (تصاعديًّا) : .... , ... , ...

2 AB = 6 سم ، BC = 7 سم ، AC = 8 سم (تنازليًّا) : .... , ... , ...

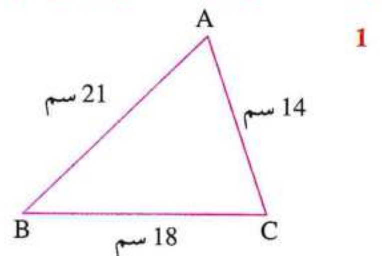
4 رتب أطوال أضلاع المثلث XYZ تبعًا للمطلوب:

1 $m(\angle X) = 60°$ ، $m(\angle Y) = 50°$ (تنازليًا) : .... , ... , ...

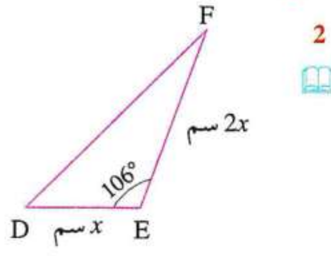
2 $m(\angle X) = 30°$ ، $m(\angle Z) = 110°$ (تصاعديًا) : .... , ... , ...

5 رتب تصاعديًّا قياسات الزوايا فى كل مثلث من المثلثات الآتية:

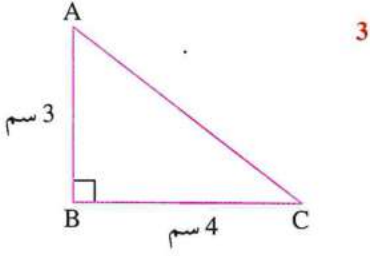
1



2

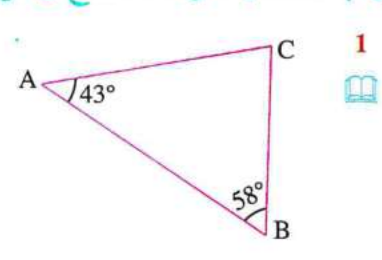


3

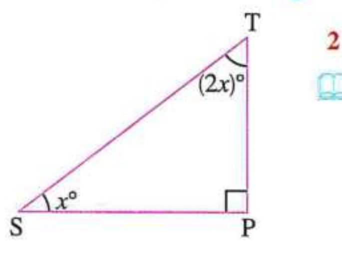


6 رتب تصاعديًّا أطوال الأضلاع فى كل مثلث من المثلثات الآتية:

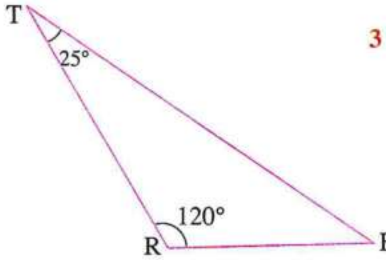
1



2

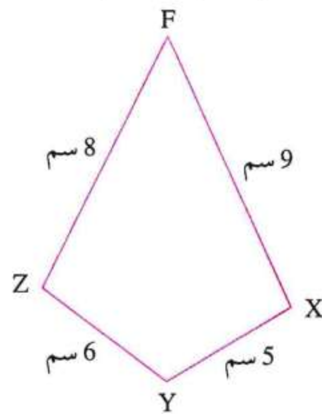


3



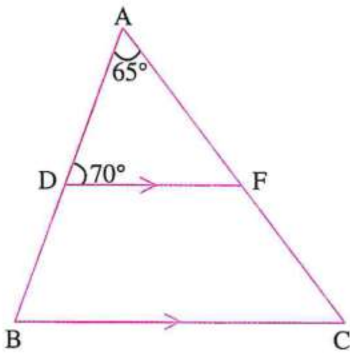
7 فى الشكل التالى:

أثبت أن: $m(\angle XYZ) > m(\angle XFZ)$



8 فى الشكل التالى:

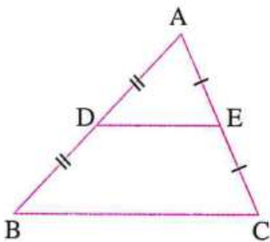
أثبت أن: $AC > AB$



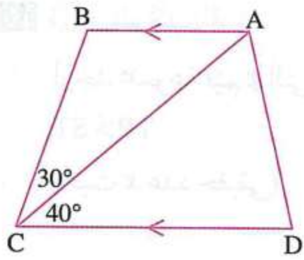
9 فى الشكل المقابل:

إذا كان E منتصف $\overline{AC}$ ، D منتصف $\overline{AB}$ ، $AD > AE$

أثبت أن: $m(\angle C) > m(\angle B)$



10 فى الشكل المقابل:

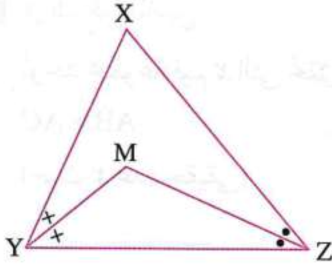


$\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$، $m(\angle ACD) = 40°$ ، $m(\angle BCA) = 30°$

أثبت أن:

$BC > AB$

11 فى الشكل المقابل:



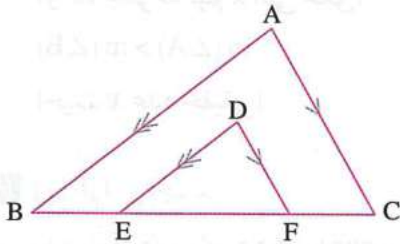
XYZ مثلث فيه:

$\overrightarrow{YM}$ ينصف $\angle XYZ$ ، $\overrightarrow{ZM}$ ينصف $\angle XZY$ ، $XZ > XY$

أثبت أن:

$m(\angle MYZ) > m(\angle MZY)$

12 فى الشكل المقابل:



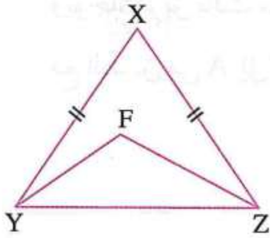
إذا كان:

$\overline{DF} \,//\, \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$ ، $AC < AB$

أثبت أن:

$DE > DF$

13 فى الشكل المقابل:

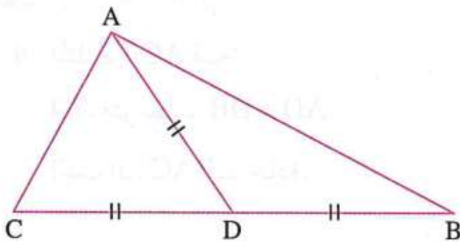


ΔXYZ فيه:

$XY = XZ$ ، $FZ > FY$

أثبت أن: $m(\angle XZF) > m(\angle XYF)$

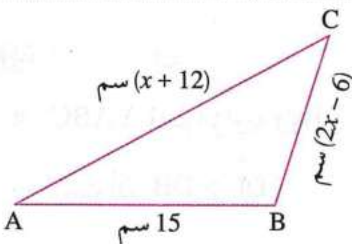
14 فى الشكل المقابل:



$AB > AC$ ، $DB = DC = DA$

أثبت أن: $m(\angle BAD) < m(\angle CAD)$

15 فى الشكل المقابل:

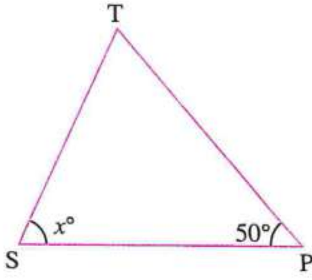


أوجد مجموعة قيم x التى تحقق أن:

$m(\angle A) < m(\angle B)$

(حيث x عدد حقيقى)

16 في الشكل المقابل:

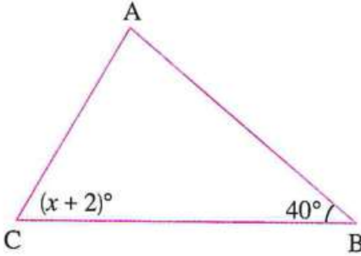


أوجد مجموعة قيم x التى تحقق:

$TP > ST$

(حيث x عدد حقيقى)

17 فى الشكل المقابل:

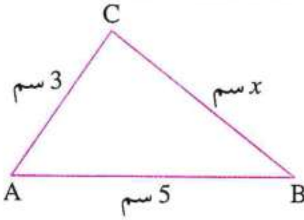


أوجد مجموعة قيم x التى تحقق:

$AB > AC$

(حيث x عدد حقيقى)

18 فى الشكل المقابل:



أوجد مجموعة قيم x التى تحقق:

$m(\angle A) > m(\angle B)$

(حيث x عدد حقيقى)

19 اقرأ ثم أجب:

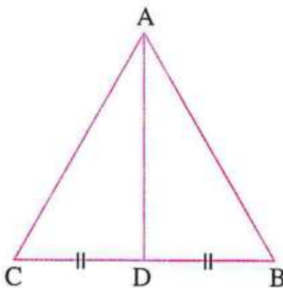


يلتقى طريقان بزاوية قياسها 50° عند النقطة A

ويوجد طريق ثالث من B إلى C يصنع زاوية قياسها 45° مع الطريق من A إلى C، أى التقاطعين A أم B أقرب إلى C؟ اشرح.



20 فى الشكل المقابل:

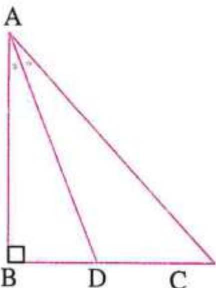


المثلث ACB فيـه:

$\overline{AD}$ متوسط ، $AD > DB$

أثبت أن: $\angle BAC$ حادة.

21 فى الشكل المقابل:



ΔABC قائم الزاوية فى B ، $\overrightarrow{AD}$ ينصف $\angle BAC$

أثبت أن: $DC > DB$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 فى Δ ABC إذا كان $m(\angle A) = 60°$ ، $m(\angle B) = 30°$ فإن: BC .... AB

(ا) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

2 فى Δ XYZ إذا كان: $m(\angle X) = 120°$ فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

(ا) $\overline{XY}$ (ب) $\overline{YZ}$ (جـ) $\overline{XZ}$ (د) لا شىء مما سبق

3 فى Δ ADB إذا كان: AD > BD فإن: $m(\angle B)$ .... $m(\angle A)$

(ا) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\geq$

4 إذا كان: $Z > X$ ، $Y > Z$ ، فإن: X .... Y

(ا) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

5 إذا كانت النقطة (H , 7) تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 2x - 3$ ، فما قيمة H ؟ ....

(ا) 5 (ب) 7 (جـ) 3 (د) -5

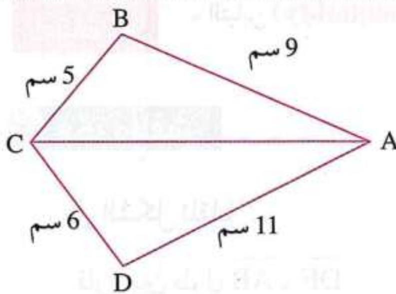
2 أكمل ما يأتى:

1 إذا كان XYZ مثلثًا فيه $m(\angle X) = m(\angle Y) + m(\angle Z)$ فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

2 إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ....

3 أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولًا هو ....

3 أجب عما يأتى:



1 فى الشكل المقابل:

أثبت أن: $m(\angle BCD) > m(\angle BAD)$

2 Δ XYZ فيه: $m(\angle X) = 70°$ ، $m(\angle Y) = 30°$

رتب تصاعديًا: أطوال أضلاع المثلث.

3 إذا كانت: $X = \{-1 , 1 , 2\}$ ، $Y = \{-1 , 1 , 4 , 8\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y

حيث "$x\,R\,y$" تعنى $x = \sqrt[3]{y}$ لكل $x \in X$, $y \in Y$

(ا) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (ب) أثبت أن R دالة موضحًا مداها.

ذاكر

الدرس 2

التباين فى المثلثات الجزء 2
(Inequality in Triangles)





نواتج التعلم

- يعرف الطالب نظريات التباين فى مثلثين.
- يستخدم الطالب نظريات التباين فى المثلثات فى حل بعض المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

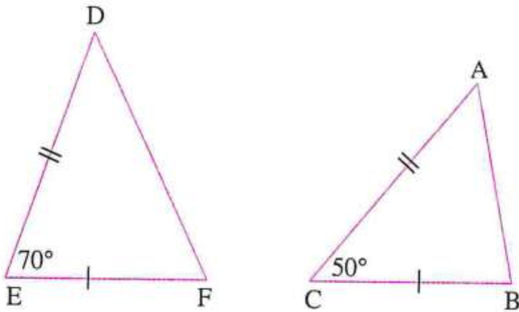
- التباين (**Inequality**)



فكر وناقش

فى الشكل المقابل:

قارن بين طول $\overline{AB}$ ، $\overline{DF}$

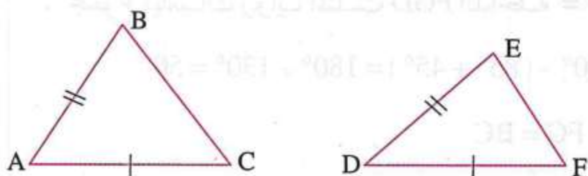


- فى هذا الدرس، سوف نتعرف على نظريات التباين فى مثلثين، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات.

تعلم | التباين فى مثلثين:

نظرية:

إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف قياسا الزاويتين المحصورتين بين الضلعين فى كل منهما؛ فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول.



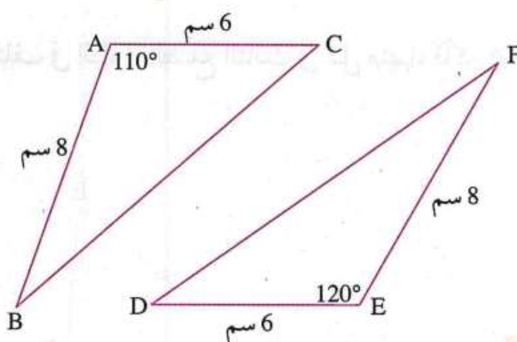
فمثلًا:

إذا كان: $AB = DE$ ، $AC = DF$ ، $m(\angle A) > m(\angle D)$

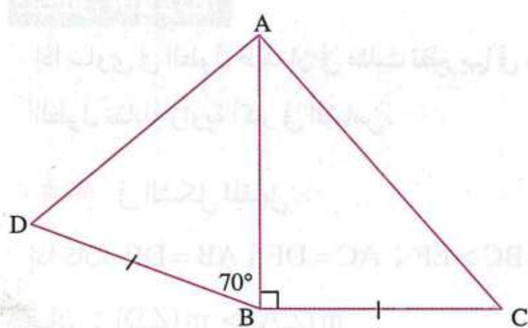
فإن : $BC > EF$

مثال 1 فى كلٍّ مما يلى:

1 قارن بين طول $\overline{FD}$ ، وطول $\overline{BC}$



2 قارن بين طول $\overline{AD}$ ، وطول $\overline{AC}$



الحل

1

$\because EF = AB \ , \ DE = AC$

$\because m(\angle E) > m(\angle A)$

$\therefore FD > BC$

2

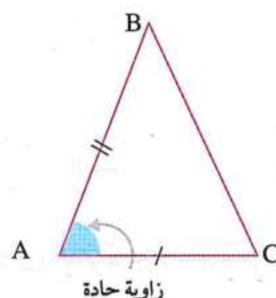
$\because BD = BC \ , \ AB = AB$ ضلع مشترك

$\because m(\angle ABD) < m(\angle ABC)$

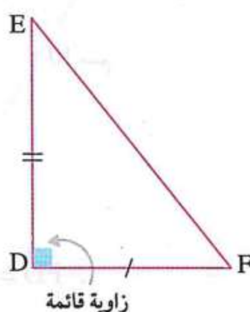
$\therefore AD < AC$

نقاط هامة

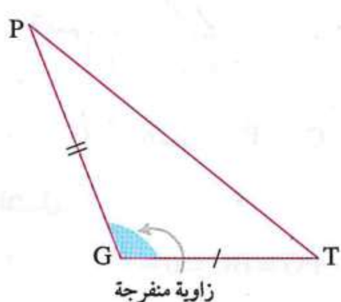
- يزداد طول الضلع المقابل للزاوية المحصورة بين ضلعين فى مثلث كلما زاد قياس هذه الزاوية.



زاوية حادة



زاوية قائمة



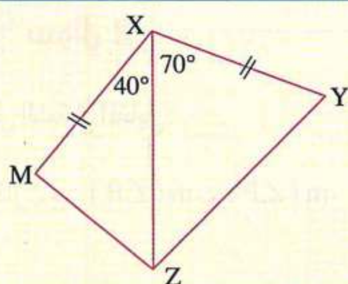
زاوية منفرجة

$BC < EF < PT$

س سؤال 1

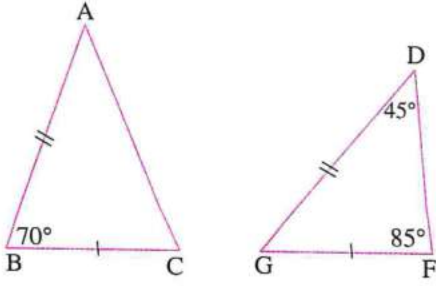
فى الشكل المقابل:

قارن بين طول $\overline{ZY}$ ، طول $\overline{MZ}$



مثـال 2 فى الشكل المقابل:

قارن بين طول $\overline{FD}$ وطول $\overline{AC}$



الحـل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث FGD الداخلة = 180°

$\therefore m(\angle G) = 180° - (85° + 45°) = 180° - 130° = 50°$

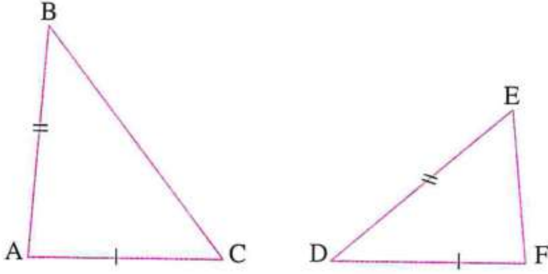
$\because DG = AB \quad , \quad FG = BC$

$\because m(\angle G) < m(\angle B)$

$\therefore FD < AC$

عكس النظرية:

إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف فى الطول الضلع الثالث فى كل منهما، فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس.



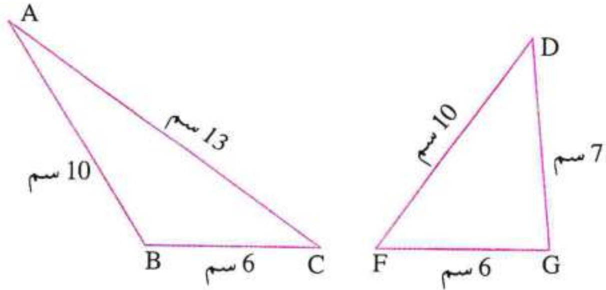
فمثلاً: فى الشكل المقابل:

إذا كان: $AB = DE$ ، $AC = DF$ ، $BC > EF$

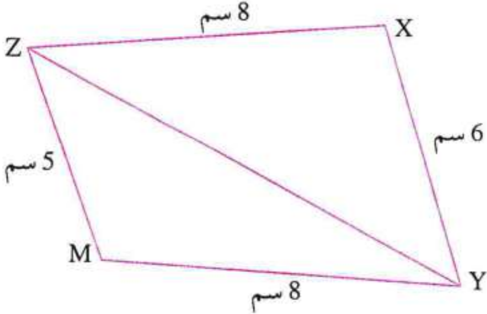
فإن : $m(\angle A) > m(\angle D)$

مثـال 3 فى كلٍّ مما يلى:

1 قارن بين $m(\angle F)$ ، $m(\angle B)$



2 قارن بين $m(\angle XZY)$ ، $m(\angle ZYM)$



الحـل

1 $\because FD = BA = 10 \quad , \quad FG = BC = 6 \quad ,$

$DG < AC$

$\therefore m(\angle F) < m(\angle B)$

2 $\because XZ = MY = 8$ ، $ZY = ZY$ (ضلع مشترك) ،

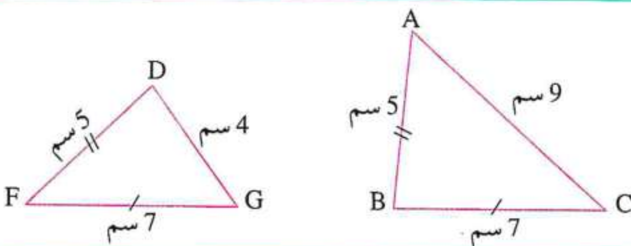
$XY > ZM$

$\therefore m(\angle XZY) > m(\angle ZYM)$

س؟ سؤال 2

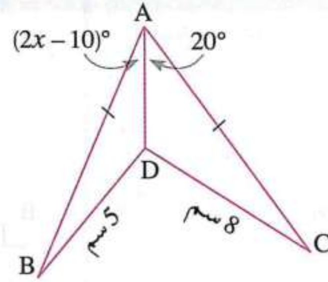
فى الشكل المقابل:

قارن بين $m(\angle B)$ ، $m(\angle F)$

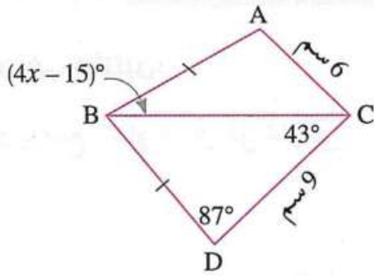


مثـال 4 أوجد مجموعة قيم x الممكنة فى كلٍّ مما يأتى: (حيث x عدد حقيقى)

1



2



الحـل

1 $\because AB = AC$, $AD = AD$ (ضلع مشترك)

$\because BD < DC \quad \therefore m(\angle BAD) < m(\angle CAD)$

$\therefore 2x - 10 < 20 \quad \therefore 2x < 20 + 10$

$\therefore 2x < 30 \quad \therefore \frac{2x}{2} < \frac{30}{2}$

$\therefore x < 15$

$\because m(\angle BAD) > 0$

$\therefore 2x - 10 > 0 \quad \therefore 2x > 10$

$\therefore \frac{2x}{2} > \frac{10}{2} \quad \therefore x > 5$

$\therefore 5 < x < 15$

$\therefore x \in]5, 15[$

2 $\because$ مجموع قياسات زوايا المثلث BDC الداخلة = 180°

$\therefore m(\angle DBC) = 180° - (87° + 43°) = 180° - 130° = 50°$

$\because AB = BD$, $BC = BC$ (ضلع مشترك)

$\because AC < DC \quad \therefore m(\angle CBA) < m(\angle DBC)$

$\therefore 4x - 15 < 50$

$\therefore 4x < 50 + 15 \quad \therefore 4x < 65$

$\therefore \frac{4x}{4} < \frac{65}{4} \quad \therefore x < 16.25$

$\because m(\angle CBA) > 0$

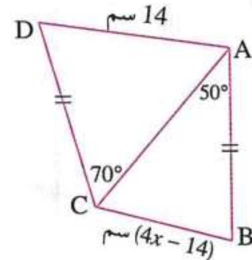
$\therefore 4x - 15 > 0 \quad \therefore 4x > 15$

$\therefore \frac{4x}{4} > \frac{15}{4} \quad \therefore x > 3.75$

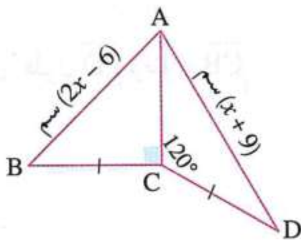
$\therefore 3.75 < x < 16.25 \quad \therefore x \in]3.75, 16.25[$

مثـال 5 أوجد مجموعة قيم x الممكنة فى كلٍّ مما يأتى: (حيث x عدد حقيقى)

1



2



الحـل

1 $\because AB = CD$, $AC = AC$ (ضلع مشترك)

$\because m(\angle CAB) < m(\angle DCA) \quad \therefore CB < DA$

$\therefore 4x - 14 < 14 \quad \therefore 4x < 14 + 14$

$\therefore 4x < 28 \quad \therefore \frac{4x}{4} < \frac{28}{4}$

$\therefore x < 7$

$\because CB > 0 \quad \therefore 4x - 14 > 0$

$\therefore 4x > 14 \quad \therefore \frac{4x}{4} > \frac{14}{4}$

$\therefore x > 3.5$

$\therefore 3.5 < x < 7 \quad \therefore x \in]3.5, 7[$

2 $\because BC = CD$, $AC = AC$ (ضلع مشترك)

$\because m(\angle BCA) < m(\angle ACD) \quad \therefore AB < AD$

$\therefore 2x - 6 < x + 9$

$\therefore 2x - x < 9 + 6 \quad \therefore x < 15$

$\because AB > 0 \quad \therefore 2x - 6 > 0$

$\therefore 2x > 6 \quad \therefore x > 3$

$\because AD = x + 9$, $x > 3 \quad \therefore AD > 0$

متحققة لجميع قيم x حيث $x > 3$

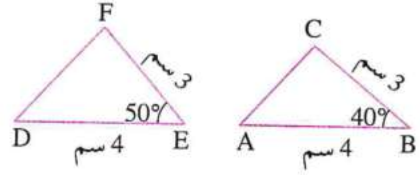
$\therefore 3 < x < 15 \quad \therefore x \in]3, 15[$

أسئلة الكتاب المدرسى

التباين فى مثلثين:

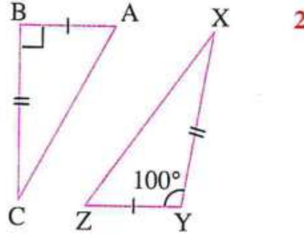
1 قارن بوضع (> أو <) فى كل مما يأتى:

1



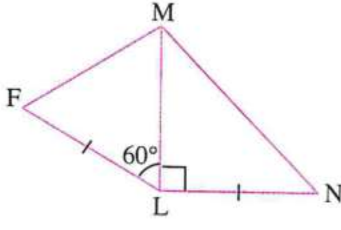
طول $\overline{AC}$ .... طول $\overline{DF}$

2



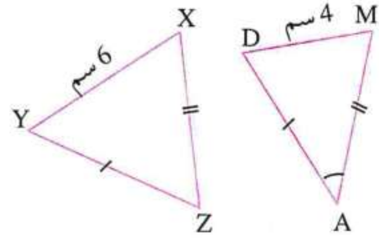
طول $\overline{XZ}$ .... طول $\overline{CA}$

3



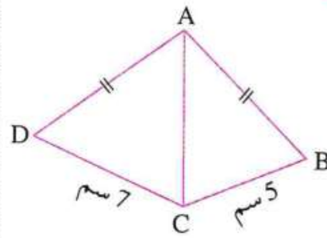
طول $\overline{MN}$ .... طول $\overline{FM}$

4



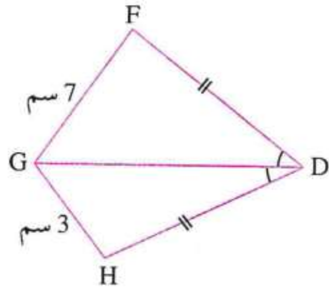
m (∠Z) .... m (∠A)

5



m (∠BAC) .... m (∠DAC)

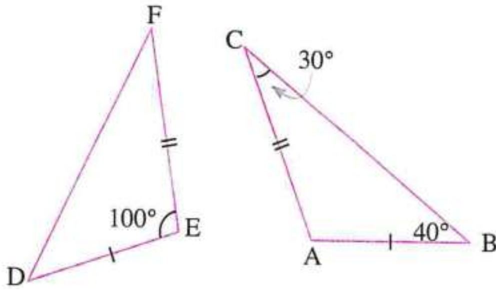
6



m (∠HDG) .... m (∠FDG)

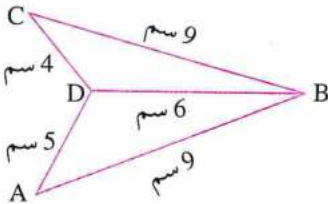
2 فى الشكل المقابل:

قارن بين: طول $\overline{FD}$ وطول $\overline{CB}$



3 فى الشكل المقابل:

قارن بين: m (∠CBD) ، m (∠ABD)

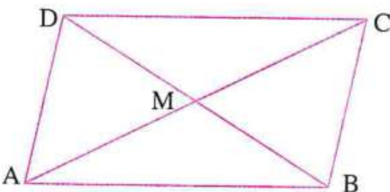


4 فى الشكل المقابل:

ABCD متوازى أضلاع

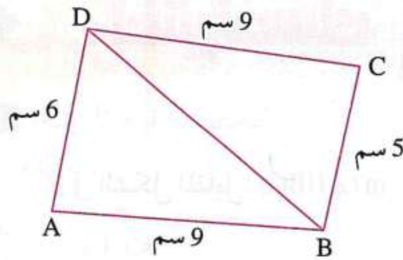
قطراه متقاطعان فى M ، AB > BC

برهن أن: m (∠AMB) > m (∠CMB)



5 📖 فى الشكل المقابل:

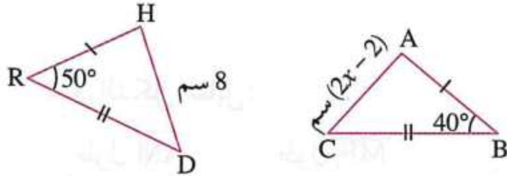
قارن بين: $m(\angle ABD)$ ، $m(\angle CDB)$



6 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

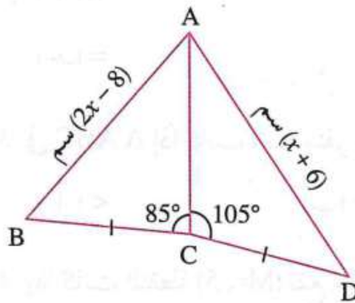
(حيث x عدد حقيقى)



7 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

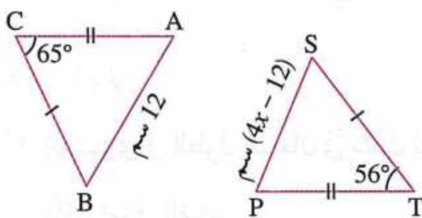
(حيث x عدد حقيقى)



8 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

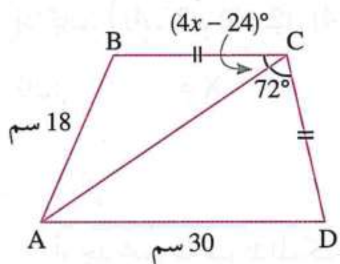
(حيث x عدد حقيقى)



9 📖 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

(حيث x عدد حقيقى)

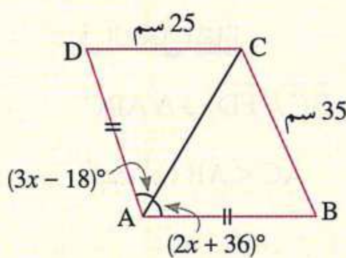


TIMSS تفكير إبداعى

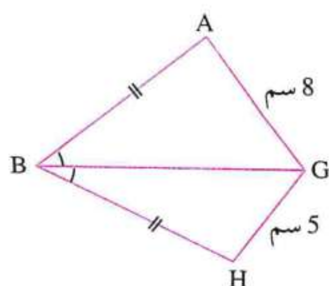
10 فى الشكل المقابل:

أوجد مجموعة قيم x الممكنة.

(حيث x عدد حقيقى)



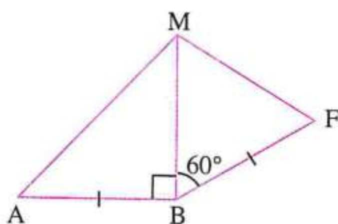
1 اختر الإجابة الصحيحة:



1 فى الشكل المقابل: m (∠HBG) .... m (∠ABG)

(ا) >　　(ب) <

(جـ) =　　(د) غير ذلك



2 فى الشكل المقابل:

طول $\overline{AM}$ .... طول $\overline{MF}$

(ا) >　　(ب) <

(جـ) =　　(د) غير ذلك

3 فى Δ ABC إذا كانت ∠A منفرجة، فإن AB .... CB

(ا) >　　(ب) <　　(جـ) =　　(د) غير ذلك

4 إذا كانت النقطة (5 , M) تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 3x - 1$ فما قيمة M ؟ ....

(ا) 3　　(ب) 1　　(جـ) 2　　(د) −2

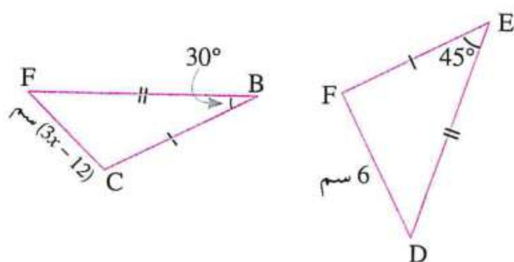
2 أكمل ما يأتى:

1 إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف قياسا الزاويتين المحصورتين بين الضلعين فى كل منهما، فأكبرهما فى القياس ....

2 إذا كان: X × Y = {(1 , 3) , (1 , 4) , (2 , 3) , (2 , 4)}

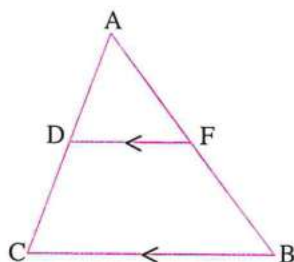
فإن: X = ...

3 أجب عما يأتى:



1 أوجد مجموعة قيم x الممكنة

(حيث x عدد حقيقى)



2 فى الشكل المقابل:

Δ ABC فيه $\overline{FD}$ // $\overline{BC}$ ، AD < AF

أثبت أن: AB < AC

ذاكر الدرس 3

المساقط العمودية ونظرية إقليدس الجزء 1

(The Perpendicular Projections and Euclid's Theorem)





نواتج التعلم

- يعرف الطالب المسقط العمودى لنقطة على مستقيم.
- يعرف الطالب المسقط العمودى لقطعة مستقيمة على مستقيم.

مفردات أساسية

- المسقط العمودى (**The Perpendicular Projection**)



فكر وناقش

- تمثال الملك رمسيس الثانى تحفة فنية فريدة تجسد عظمة الفراعنة، وإبداع المصريين القدماء فى فن النحت، تم اكتشافه عام 1820م بالقرب من منطقة ميت رهينة جنوب الجيزة، ثُم نقل إلى ميدان باب الحديد عام 1955، ليتغير اسم الميدان إلى ميدان رمسيس، وظل هناك إلى أن تم نقله إلى موقعه الحالى بالمتحف المصرى الكبير، هل يمكنك تحديد ارتفاع التمثال من خلال البيانات الموضحة فى الصورة؟



تمثال الملك رمسيس الثانى بالمتحف المصرى الكبير

- فى هذا الدرس، سوف نتعرف على المساقط العمودية مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

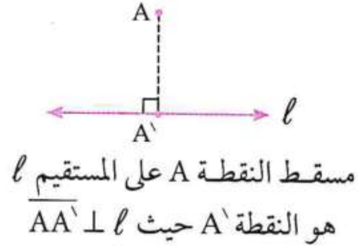
تعلم | المساقط العمودية:

أولًا | مسقط نقطة على مستقيم:

مسقط نقطة على مستقيم هى نقطة تمثل موقع العمود الساقط من النقطة على هذا المستقيم.

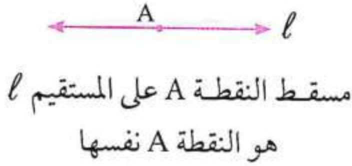
فمثلًا: يمكن إيجاد مسقط النقطة A على المستقيم ℓ كما يلى:

إذا كانت $A \notin \ell$



مسقط النقطة A على المستقيم ℓ هو النقطة \`A حيث $\overline{AA'} \perp \ell$

إذا كانت $A \in \ell$

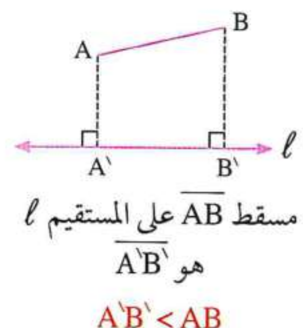


مسقط النقطة A على المستقيم ℓ هو النقطة A نفسها

ثانيًا | مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم:

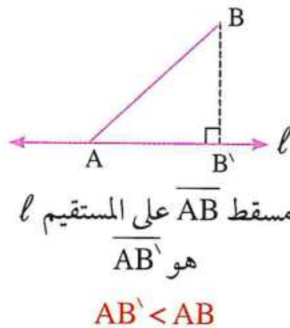
مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو القطعة المستقيمة التى طرفاها هما مسقطا طرفى القطعة المستقيمة الأصلية على هذا المستقيم.

فمثلًا: يمكن إيجاد مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ كما يلى:



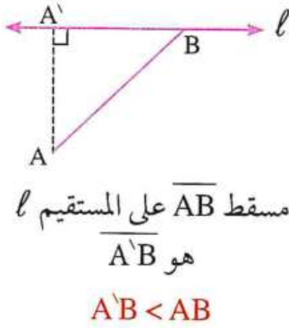
مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B'}$

$A'B' < AB$



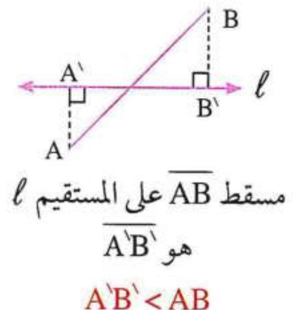
مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{AB'}$

$AB' < AB$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B}$

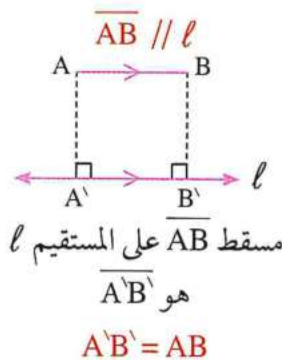
$A'B < AB$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B'}$

$A'B' < AB$

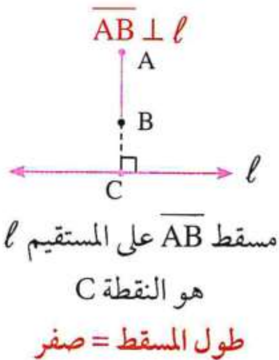
$\overline{AB} \parallel \ell$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B'}$

$A'B' = AB$

$\overline{AB} \perp \ell$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو النقطة C

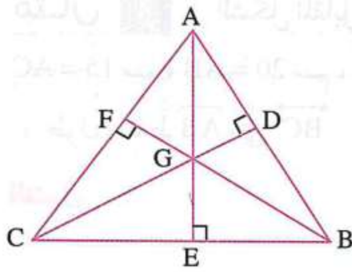
طول المسقط = صفر

نقاط هامة

من الأشكال السابقة نستنتج أن:

- طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم مساوٍ أو أقل من طول القطعة المستقيمة نفسها.
- إذا كانت القطعة المستقيمة موازية لمستقيم معلوم يكون طول مسقطها على هذا المستقيم مساويًا لطول هذه القطعة.
- إذا كانت القطعة المستقيمة عمودية على مستقيم معلوم، فإن مسقطها يكون نقطة وطول مسقطها يساوى صفرًا.
- لا يمكن أن يكون طول مسقط القطعة المستقيمة على مستقيم أكبر من طول القطعة المستقيمة نفسها.

مثـال 1 فى الشكل المقابل:



المثلث ABC رُسمت فيه ارتفاعاته الثلاثة $\overline{AE}$ ، $\overline{BF}$ ، $\overline{CD}$ ، أكمل ما يأتى:

1 مسقط $\overline{AG}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

2 مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

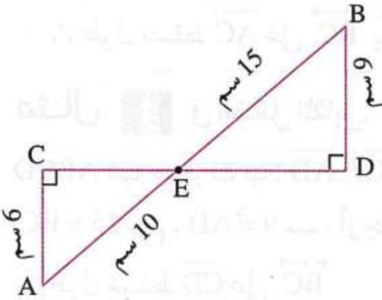
3 مسقط $\overline{GC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو .... 4 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

5 مسقط $\overline{BC}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ هو .... 6 مسقط $\overline{GB}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ هو ....

الحـل

1 النقطة E 2 $\overline{EC}$ 3 $\overline{EC}$ 4 $\overline{AF}$ 5 $\overline{BD}$ 6 $\overline{DB}$

مثـال 2 فى الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{BD}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AC}$ ، $E \in \overline{CD}$ ، أوجد كلًا مما يلى:

1 طول مسقط $\overline{AE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$

2 طول مسقط $\overline{BE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$

3 طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{CD}$

الحـل

1 مسقط $\overline{AE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ هو $\overline{CE}$

فى المثلث ACE القائم الزاوية فى C

$CE = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} = 8$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ يساوى 8 سم

2 مسقط $\overline{BE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ هو $\overline{DE}$

فى المثلث BDE القائم الزاوية فى D

$DE = \sqrt{(15)^2 - (9)^2} = 12$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{BE}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ يساوى 12 سم

3 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ هو $\overline{CD}$

$\because CD = CE + ED$

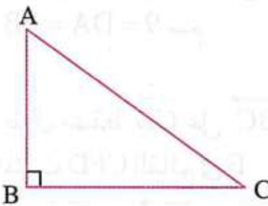
$\therefore CD = 8 + 12 = 20$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{CD}$ يساوى 20 سم

تذكـر أن

نظرية فيثاغورس

- المثلث ABC قائم الزاوية فى B

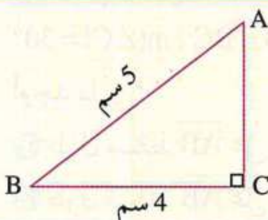


- $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2}$
- $AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$
- $BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2}$

س؟ سؤال 1

من الشكل المقابل:

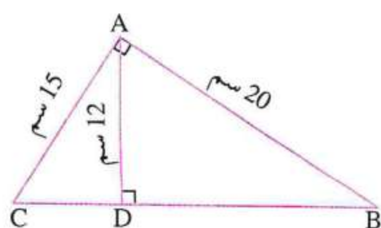
أوجد طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$



مثـال 3 في الشكل المقابل:

$AC = 15$ سم ، $AB = 20$ سم ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $AD = 12$ سم، **أوجد:**

1 طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ 2 طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$



الحـل

$\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{DB}$ هي مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overline{DC}$ هي مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$

1 في المثلث ADB $\because m(\angle ADB) = 90°$

من نظرية فيثاغورس $\therefore DB = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 16 سم

2 في المثلث ADC $\because m(\angle ADC) = 90°$

من نظرية فيثاغورس $\therefore CD = \sqrt{(15)^2 - (12)^2} = 9$

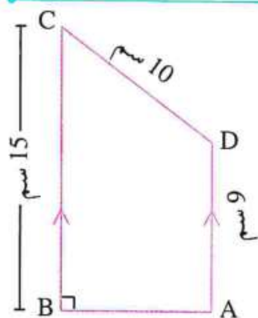
$\therefore$ طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 9 سم

مثـال 4 في الشكل المقابل:

ABCD شبه منحرف فيه: $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $m(\angle B) = 90°$ ، $DC = 10$ سم ،

$BC = 15$ سم ، $AD = 9$ سم، **أوجد:**

1 طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ 2 طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$



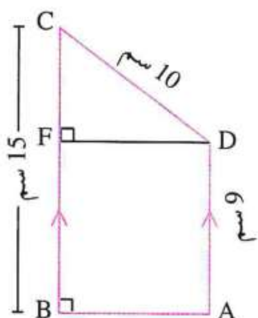
الحـل

العمل والبرهان: نرسم $\overrightarrow{DF}$ حيث $\overline{DF} \perp \overline{BC}$ ، $F \in \overline{BC}$

1 مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو $\overline{FC}$

$\because \overline{AB} \perp \overline{BC} \ , \ \overline{DF} \perp \overline{BC}$ $\therefore \overline{AB} // \overline{DF}$

$\because \overline{AD} // \overline{BC} \ , \ \overline{AB} // \overline{DF} \ , \ m(\angle B) = 90°$



$\therefore$ الشكل ABFD مستطيل

$\therefore FB = DA = 9$ سم

$\therefore FC = 15 - 9 = 6$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 6 سم

2 في المثلث CFD القائم في F $FD = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} = 8$

مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\overline{BA}$

$\because$ الشكل ABFD مستطيل $\therefore BA = FD = 8$ سم

$\therefore$ طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ يساوى 8 سم

س؟ سؤال 2

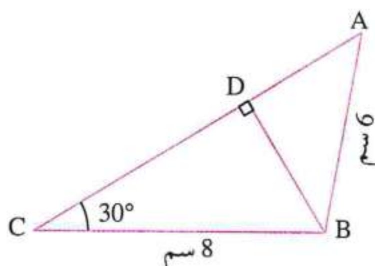
في الشكل المقابل:

$m(\angle C) = 30°$ ، $BC = 8$ سم ، $AB = 6$ سم، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

أوجد ما يلي:

1 طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BD}$

2 طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$



تدرّب الدرس 3

المساقط العمودية ونظرية إقليدس
(The perpendicular projections and Euclid's Theorem)

الجزء 1

▲تذكر ▲فهم ▲تطبيق ▲تحليل ▲تقييم ▲ابتكار

أسئلة الكتاب المدرسى

المساقط العمودية:

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت $B \in \overleftrightarrow{AC}$ فإن مسقط B على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

(أ) $\{A\}$ (ب) $\{C\}$ (جـ) $\overline{AC}$ (د) $\{B\}$

2 إذا كانت النقطة `B هى مسقط النقطة B على $\overleftrightarrow{AC}$ ، حيث $B \notin \overleftrightarrow{AC}$ فإن $\overleftrightarrow{AC}$ .... $\overline{BB'}$.

(أ) $=$ (ب) $\perp$ (جـ) $\cong$ (د) $//$

3 إذا كان مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو قطعة مستقيمة مساوية لها فى الطول، فإن القطعة المستقيمة .... المستقيم.

(أ) $//$ (ب) $\perp$ (جـ) $=$ (د) $\leq$

4 طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم .... طول القطعة الأصلية.

(أ) $=$ (ب) $<$ (جـ) $\geq$ (د) $\leq$

5 إذا كان المثلث XYZ قائم الزاوية فى Y، فإن مسقط $\overline{XY}$ على $\overline{ZY}$ هو ....

(أ) $\overline{ZY}$ (ب) $\overline{XY}$ (جـ) $\{Y\}$ (د) $\{Z\}$

6 إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، فإن مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

(أ) $\overline{AB}$ (ب) $\overline{BC}$ (جـ) $\overline{AC}$ (د) $\{B\}$

7 إذا كان ABCD مستطيلًا، فإن مسقط $\overline{DB}$ على $\overleftrightarrow{AD}$ هو ....

(أ) $\{A\}$ (ب) $\overline{DA}$ (جـ) $\overline{AB}$ (د) $\overline{DC}$

8 إذا كان XYLZ مربعًا، فإن مسقط $\overline{XY}$ على $\overleftrightarrow{ZL}$ هو ....

(أ) $\{X\}$ (ب) $\overline{ZL}$ (جـ) $\overline{ZY}$ (د) $\{Y\}$

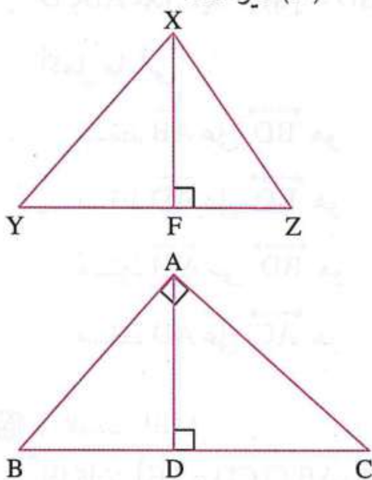
9 إذا كان $\overleftrightarrow{DF} \ // \ \overline{HL}$ ، فإن طول مسقط $\overline{HL}$ على $\overleftrightarrow{DF}$ .... طول $\overline{HL}$.

(أ) $=$ (ب) $<$ (جـ) $>$ (د) غير ذلك

10 فى الشكل المقابل:

مسقط $\overline{XY}$ على $\overleftrightarrow{ZY}$ هو ....

(أ) $\overline{YZ}$ (ب) $\overline{FY}$ (جـ) $\overline{FZ}$ (د) $\overline{XY}$



◄ فى الشكل المقابل:

المثلث ABC قائم الزاوية A،

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ بحيث $D \in \overline{BC}$

11 ما مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟..............

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$ (جـ) $\overline{DC}$ (د) $\{D\}$

12 ما مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ ؟..............

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$ (جـ) $\overline{DC}$ (د) $\{D\}$

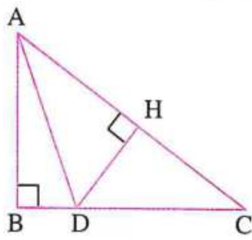
13 ما مسقط $\overline{BC}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ ؟..............

(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{AC}$ (جـ) $\overline{BA}$ (د) $\{A\}$

2 أكمل الجدول التالى:

الشكل / المساقط	A B C	A X B C Y
1 مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$	....	....
2 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$	....	....
3 مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{AB}$	....	....

3 فى الشكل المقابل:



ABC مثلث قائم الزاوية فى B، $D \in \overline{BC}$ ،

$\overline{DH} \perp \overline{AC}$ ،

أكمل كلًّا مما يأتى:

1 مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

2 مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

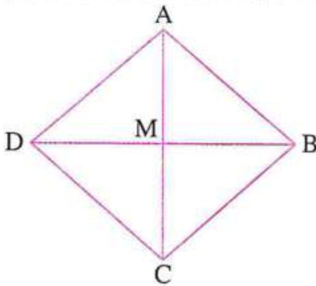
3 مسقط $\overline{DH}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

4 مسقط النقطة C على $\overleftrightarrow{AB}$ هو ....

5 مسقط النقطة A على $\overleftrightarrow{DC}$ هو ....

6 مسقط النقطة D على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

4 فى الشكل المقابل:



ABCD معين فيه: $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$

أكمل ما يأتى:

1 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BD}$ هو ....

2 مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BD}$ هو ....

3 مسقط $\overline{AM}$ على $\overleftrightarrow{BD}$ هو ....

4 مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

تذكر أن

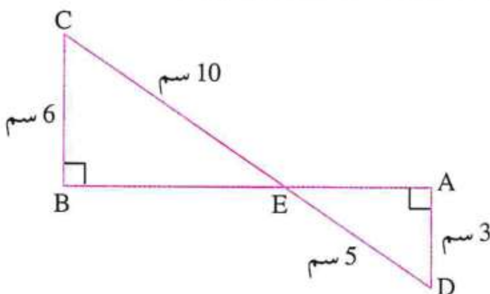
- القطران فى المعين متعامدان.

5 فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$، $m(\angle A) = m(\angle B) = 90°$ ،

AD = 3 سم، ED = 5 سم، CE = 10 سم، CB = 6 سم،

فأوجد طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$



6 **فى الشكل المقابل:**

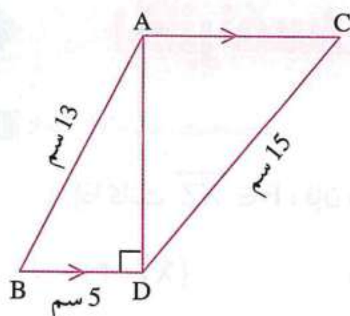
$\overline{AC} // \overline{BD}$، AB = 13 سم،

BD = 5 سم، DC = 15 سم،

$m(\angle ADB) = 90°$، أوجد:

1 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AD}$

2 مسقط $\overline{DC}$ على $\overleftrightarrow{AC}$



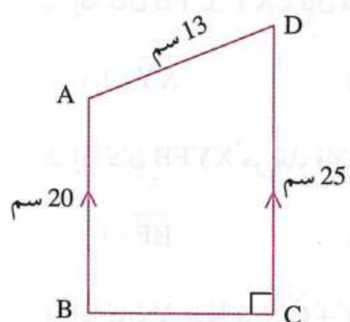
7 **فى الشكل المقابل:**

ABCD شبه منحرف قائم الزاوية،

أوجد:

1 طول مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{DC}$

2 طول مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$

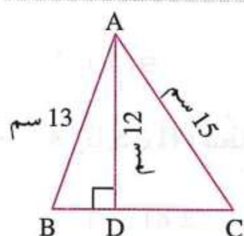


8 **فى الشكل المقابل:**

أوجد طول كل مما يأتى:

1 مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$

2 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$



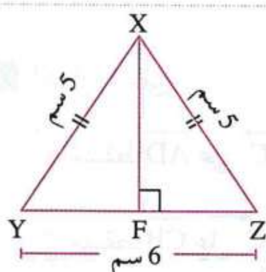
9 **فى الشكل المقابل:**

XYZ مثلث فيه XY = XZ = 5 سم،

ZY = 6 سم، $\overline{XF} \perp \overline{YZ}$ ، أوجد:

1 طول مسقط $\overline{XZ}$ على $\overleftrightarrow{YZ}$

2 مساحة المثلث XYZ



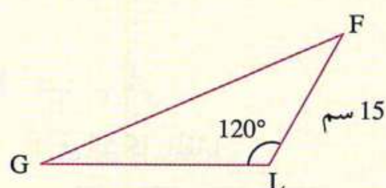
TIMSS تفكير إبداعى

10 **فى الشكل المقابل:**

FLG مثلث فيه $m(\angle GLF) = 120°$،

FL = 15 سم

احسب طول مسقط $\overline{FL}$ على $\overleftrightarrow{LG}$



11 **فى الشكل المقابل:**

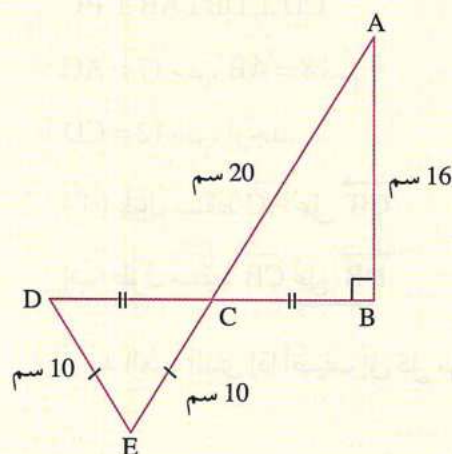
$\overline{AE} \cap \overline{DB} = \{C\}$ ، C منتصف $\overline{DB}$

AB = 16 سم، AC = 20 سم،

EC = ED = 10 سم.

أوجد طول مسقط $\overline{EC}$ على $\overleftrightarrow{DB}$

ثم أوجد مساحة سطح المثلث DEC



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت $F \in \overleftrightarrow{XZ}$ ، فإن مسقط النقطة F على $\overleftrightarrow{XZ}$ هو ....

(ا) $\{X\}$ (ب) $\{Z\}$ (جـ) $\overline{XZ}$ (د) $\{F\}$

2 إذا كان $\overline{YB} \perp \overline{XY}$ ، فإن مسقط $\overline{XY}$ على $\overleftrightarrow{YB}$ هو ....

(ا) $\overline{XY}$ (ب) $\overline{YB}$ (جـ) $\{Y\}$ (د) $\{X\}$

3 إذا كان XYFB مربعًا، فإن مسقط $\overline{BY}$ على $\overleftrightarrow{BF}$ هو ....

(ا) $\overline{BF}$ (ب) $\overline{XB}$ (جـ) $\{B\}$ (د) $\{F\}$

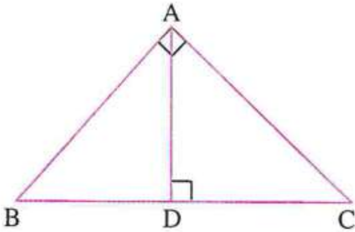
4 إذا كان $X > Y$ فإن: $Y + C$ ...... $X + C$

(ا) $=$ (ب) $<$ (جـ) $>$ (د) $\leq$

5 إذا كان H وسطًا متناسبًا بين 27 , 3 فما قيمة H؟ ....

(ا) ± 81 (ب) ± 9 (جـ) ± 3 (د) ± 27

2 أكمل ما يأتى:

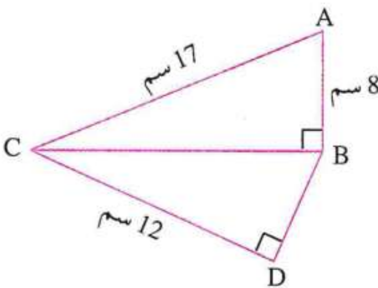


1 مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

2 مسقط $\overline{CB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

3 مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو ....

3 أجب عما يأتى:



1 فى الشكل المقابل:

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{CD} \perp \overline{DB}$

AC = 17 سم، AB = 8 سم

CD = 12 سم، أوجد:

(ا) طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{CB}$

(ب) طول مسقط $\overline{CB}$ على $\overleftrightarrow{DB}$

2 أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد 49 , 9 , 1 تصبح متناسبة.

ذاكر الدرس 3

المساقط العمودية ونظرية إقليدس الجزء 2

(The perpendicular Projections and Euclid's Theorem)

نواتج التعلم

- يعرف الطالب نظرية إقليدس ونتائجها.
- يستخدم الطالب نظرية إقليدس فى حل بعض المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

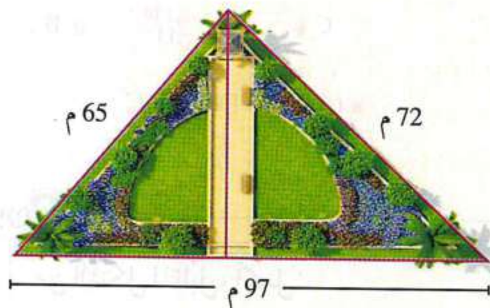
- نظرية إقليدس (**Euclid's Theorem**)
- الوسط الهندسى (**Geometric Mean**)

فكر وناقش

لدى حامد قطعة أرض مثلثة الشكل أطوالها 65م ، 72م ، 97م،

ويريد تقسيمها بممر عمودى على ضلعها الأطول ،

هل يمكنك معرفة طول هذا الممر؟

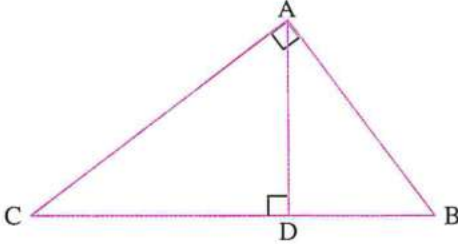


- فى هذا الدرس، سوف تتعرف على نظرية إقليدس، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم | نظرية إقليدس ونتائجها:

نظرية إقليدس:

مســاحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية تســاوى مساحة المستطيل الذى بعداه طول مسقط هذا الضلع على الوتر، وطول الوتر.



فى الشكل المقابل:

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

فإن: $(AC)^2 = CD \times CB$

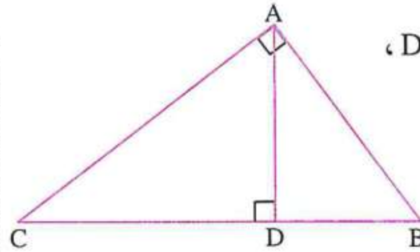
$(AB)^2 = BD \times BC$

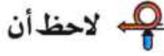
نتيجة

إذا كان: ABC مثلثًا قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$ ،

بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، فإن:

$(AD)^2 = DB \times DC$

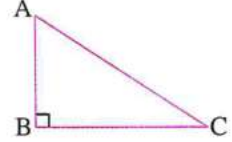



لاحظ أن

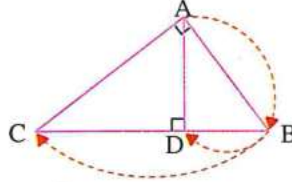
$\because (AD)^2 = DB \times DC$

$\therefore$ AD هــو الوســط الهندســى الموجب بين DB ، DC

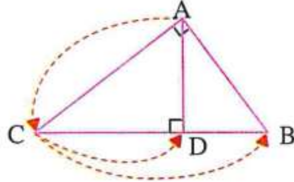
يمكننا تلخيص علاقات نظرية إقليدس وفيثاغورس كما يلى:



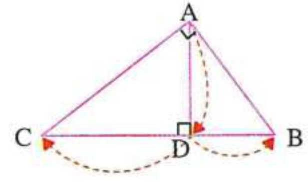
- $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
- $(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$
- $(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$



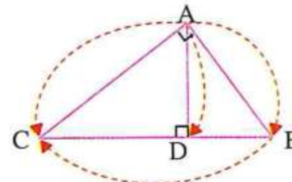
- $(AB)^2 = BD \times BC$



- $(AC)^2 = CD \times CB$



- $(AD)^2 = DB \times DC$



- $AD = \frac{AB \times AC}{BC}$

يمكــن إثبــات القانــون باســتخدام قانون مساحة المثلث كالآتى:

$\frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$\therefore AD = \frac{AB \times AC}{BC}$

س؟ سؤال 1

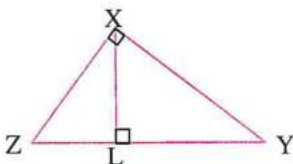
من الشكل المقابل، أكمل:

1 $(XY)^2 = \cdots\cdots \times \cdots\cdots$

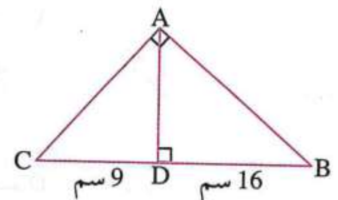
2 $(XZ)^2 = \cdots\cdots \times \cdots\cdots$

3 $(XL)^2 = \cdots\cdots \times \cdots\cdots$

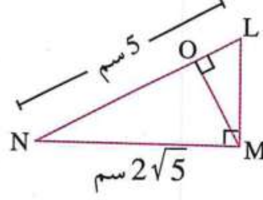
4 $XL = \frac{\cdots\cdots \times \cdots\cdots}{\cdots\cdots}$



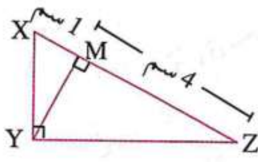
مثـال 1 أجب عما يأتى:

1


أوجد طول $\overline{AC}$

2


أوجد طول $\overline{NO}$

3


أوجد طول $\overline{YM}$

الحـل

1 فى المثلث ABC

$\because m(\angle A) = 90^\circ \ , \ \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore (AC)^2 = CD \times CB$

$= 9 \times (9 + 16) = 225$

$\therefore AC = \sqrt{225} = 15$

$\therefore$ طول $\overline{AC} = 15$ سم

2 فى المثلث LMN

$\because m(\angle M) = 90^\circ \ , \ \overline{MO} \perp \overline{LN}$

$\therefore (MN)^2 = NO \times NL$

$(2\sqrt{5})^2 = NO \times 5$

$\therefore NO = \frac{(2\sqrt{5})^2}{5} = 4$

$\therefore$ طول $\overline{NO} = 4$ سم

3 فى المثلث XYZ

$\because m(\angle Y) = 90^\circ \ , \ \overline{YM} \perp \overline{XZ}$

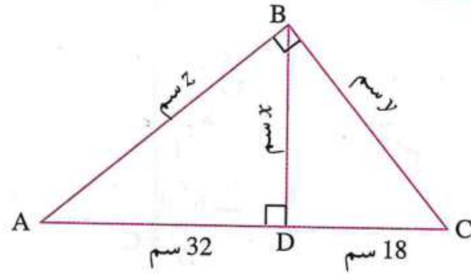
$\therefore (YM)^2 = XM \times MZ$

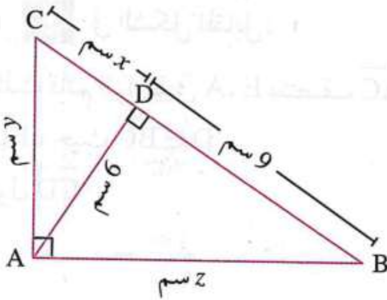
$\therefore (YM)^2 = 1 \times 4 = 4$

$\therefore YM = \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ طول $\overline{YM} = 2$ سم

مثـال 2 فى كل من الشكلين التاليين أوجد قيم x ، y ، z

1


2


الحـل

1 فى ΔABC

$\because m(\angle B) = 90^\circ \ , \ \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BD)^2 = DA \times DC$

$\therefore x^2 = 32 \times 18 = 576 \qquad \therefore x = \sqrt{576} = 24$

$\therefore (AC)^2 = CD \times CA$

$\therefore y^2 = 18 \times 50 = 900 \qquad \therefore y = \sqrt{900} = 30$

$\therefore (AB)^2 = AD \times AC$

$\therefore z^2 = 32 \times 50 = 1,600 \qquad \therefore z = \sqrt{1,600} = 40$

2 فى ΔABC

$\because m(\angle A) = 90^\circ \ , \ \overline{AD} \perp \overline{CB}$

$\therefore (AD)^2 = CD \times BD$

$\therefore (6)^2 = x \times 9 \qquad \therefore 36 = 9x$

$\therefore x = \frac{36}{9} = 4$

$\therefore (AC)^2 = CD \times CB$

$\therefore y^2 = 4 \times 13 = 52 \qquad \therefore y = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

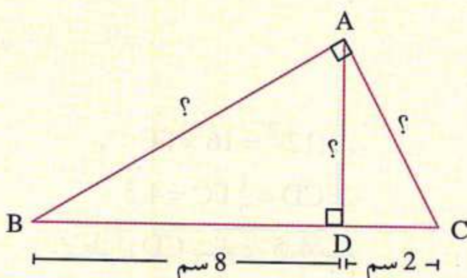
$\therefore (AB)^2 = BD \times BC$

$\therefore z^2 = 9 \times 13 = 117 \qquad \therefore z = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

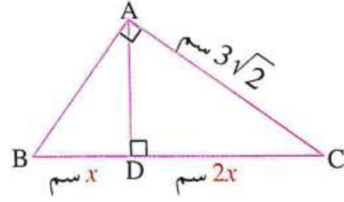
سؤال 2

فى الشكل المقابل ، أوجد:

1 طول $\overline{AC}$ 2 طول $\overline{AB}$ 3 طول $\overline{AD}$



مثال 3 في الشكل التالى:



أوجد قيمة x «حيث $x > 0$»

الحل

فى المثلث ABC

$\because m(\angle A) = 90^\circ$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

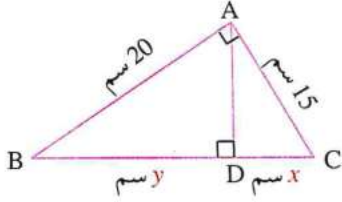
$\therefore (AC)^2 = CD \times CB$ (نظرية إقليدس)

$\therefore (3\sqrt{2})^2 = 2x \times 3x$

$\therefore 18 = 6x^2$ $\therefore x^2 = \frac{18}{6} = 3$

$\therefore x = \sqrt{3}$

مثال 4 في الشكل التالى:



أوجد قيمة x ، y

الحل

$\because m(\angle A) = 90^\circ$

$\therefore BC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ (نظرية فيثاغورس)

$\therefore$ طول $\overline{BC}$ يساوى 25 سم

$\because m(\angle A) = 90^\circ$, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\therefore (AC)^2 = CD \times CB$

$\therefore (15)^2 = x \times 25$ $\therefore x = \frac{(15)^2}{25} = 9$

$\therefore y = 25 - 9 = 16$

مثال 5 في الشكل المقابل:

ABC مثلث قائم الزاوية فى A، E منتصف $\overline{AC}$،

$\overline{ED} \perp \overline{BC}$ ، حيث $D \in \overline{BC}$

أوجد طول $\overline{CD}$

الحل

العمل والبرهان: نرسم $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ حيث $F \in \overline{BC}$

$\because \overline{AF} \perp \overline{BC}$, $\overline{ED} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overline{AF} \parallel \overline{ED}$

فى المثلث AFC

$\because$ E منتصف $\overline{AC}$ ، $\overline{AF} \parallel \overline{ED}$

$\therefore$ D منتصف $\overline{FC}$

$\because$ D منتصف $\overline{FC}$ ، E منتصف $\overline{AC}$

$\therefore AF = 2ED = 2 \times 6 = 12$

فى المثلث ABF

$\because m(\angle F) = 90^\circ$

$\therefore BF = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16$

فى المثلث ABC

$\because m(\angle A) = 90^\circ$, $\overline{AF} \perp \overline{BC}$

$\therefore (AF)^2 = FB \times FC$

$\therefore (12)^2 = 16 \times FC$

$\therefore FC = \frac{(12)^2}{16} = 9$

$\therefore CD = \frac{1}{2} FC = 4.5$

$\therefore$ طول $\overline{CD}$ يساوى 4.5 سم



مثال 6

فى الشكل التالى:

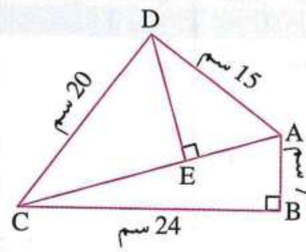
$\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $m(\angle B) = 90°$

AB = 7 سم ، CB = 24 سم

CD = 20 سم ، AD = 15 سم

أوجد طول كل من:

$\overline{AC}$ ، $\overline{DE}$



الحـل

فى المثلث ABC:

$\because m(\angle B) = 90°$

$\therefore AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ (نظرية فيثاغورس)

$\therefore$ طول $\overline{AC}$ يساوى 25 سم

فى المثلث DAC

$\because (DC)^2 + (DA)^2 = (20)^2 + (15)^2 = 625$

$\because (AC)^2 = (25)^2 = 625$

$\therefore (AC)^2 = (DC)^2 + (DA)^2 \qquad \therefore m(\angle ADC) = 90°$

$\therefore DE = \dfrac{AD \times DC}{AC} = \dfrac{15 \times 20}{25} = 12$

$\therefore$ طول $\overline{DE}$ يساوى 12 سم

مثال 7

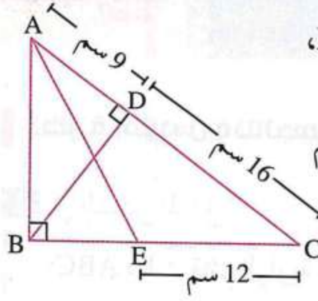
فى الشكل التالى:

ABC مثلث قائم الزاوية فى B،

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، AD = 9 سم،

CD = 16 سم ، EC = 12 سم

أوجد طول $\overline{AE}$.



الحـل

فى المثلث ABC

$\because m(\angle B) = 90° , \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (AB)^2 = AD \times AC$

$\therefore (AB)^2 = 9 \times 25 = 225 \qquad \therefore AB = 15$

$\therefore (BC)^2 = CD \times CA$

$\therefore (BC)^2 = 16 \times 25 = 400 \qquad \therefore BC = 20$

$\therefore BE = 20 - 12 = 8$

فى المثلث ABE

$\because m(\angle ABE) = 90°$

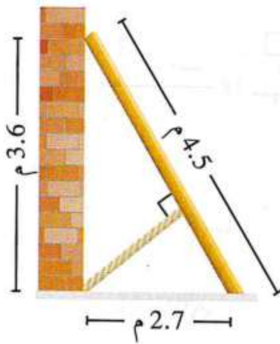
$\therefore AE = \sqrt{(AB)^2 + (BE)^2}$

$= \sqrt{(15)^2 + (8)^2} = 17$ (نظرية فيثاغورس)

$\therefore$ طول $\overline{AE}$ = 17 سم

مثال 8

عامل لديه سلم طوله 4.5 متر، يستند على حائط رأسى وقاعدته تبعد عن الحائط 2.7 متر، وارتفاع قمته عن الأرض 3.6 متر، يربط العامل السلم بحبل عمودى على السلم كما بالشكل منعًا لانزلاق السلم، كم يبلغ طول الحبل؟



الحـل

طول الحبل = $\dfrac{3.6 \times 2.7}{4.5} = 2.16$ متر

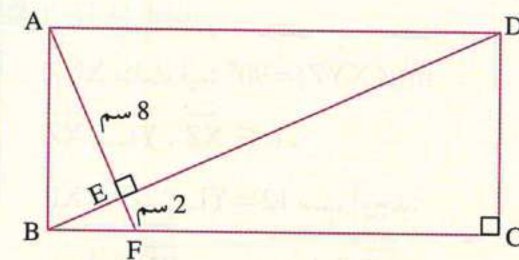
سؤال 3

فى الشكل المقابل:

ABCD مستطيل، $F \in \overline{BC}$ ، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$

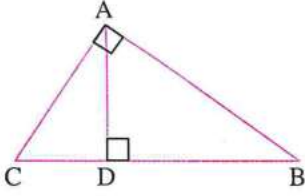
AE = 8 سم ، EF = 2 سم

أوجد طول $\overline{BD}$



أسئلة الكتاب المدرسى

نظرية إقليدس ونتائجها



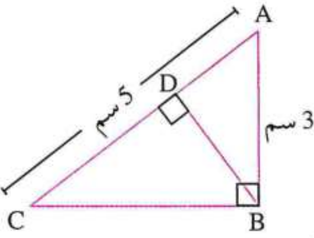
1 فى الشكل المقابل:

ABC مثلث قائم الزاوية فى A ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، أكمل ما يأتى:

1 $(AB)^2 = ... \times ....$ **2** $(AC)^2 = ... \times ....$

3 $(AD)^2 = ... \times ....$ **4** $AD = \frac{........ \times ....}{........}$

2 فى الشكل المقابل:



ABC مثلث فيه: $m(\angle ABC) = 90°$،

AB = 3 سم، AC = 5 سم، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$، أكمل:

1 BC = ... سم

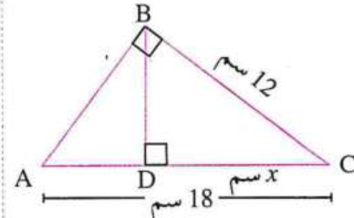
2 AD = ... سم

3 BD = ... سم

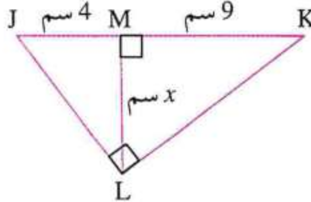
4 مساحة المثلث DBC = ... سم^2

3 فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة x:

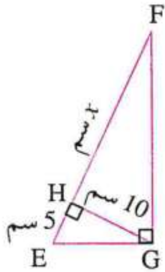
1



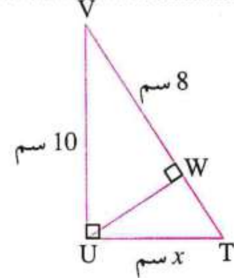
2



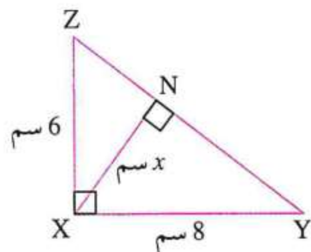
3



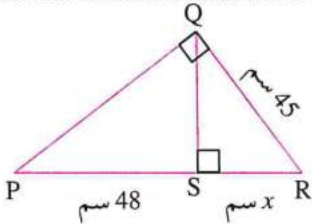
4



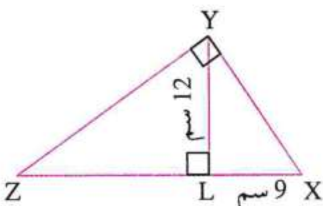
5



6



4 فى الشكل المقابل:



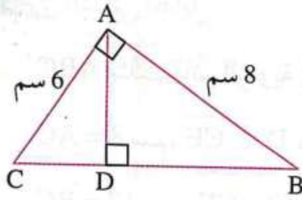
XYZ مثلث فيه: $m(\angle XYZ) = 90°$

$\overline{YL} \perp \overline{XZ}$ ، $L \in \overline{XZ}$

XL = 9 سم، YL = 12 سم، أوجد:

1 طول $\overline{XY}$ **2** طول $\overline{LZ}$ **3** طول $\overline{ZY}$

5 في الشكل المقابل:

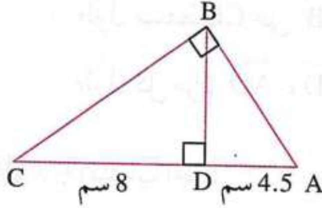


ABC مثلث فيه: $m(\angle BAC) = 90°$،

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $AB = 8$ سم ، $AC = 6$ سم

أوجد طول كلٍّ من: $\overline{BD}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{AD}$

6 في الشكل المقابل:

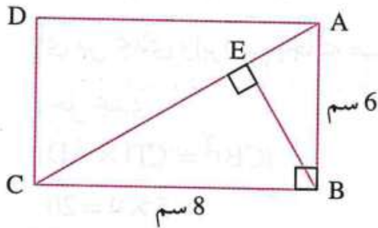


ABC مثلث قائم الزاوية فى B ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

فإذا كان: $AD = 4.5$ سم، $DC = 8$ سم

فأوجد طول كل من: $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$، $\overline{BD}$

7 في الشكل المقابل:

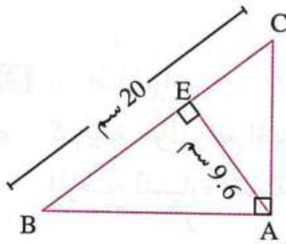


ABCD مستطيل فيه فى $AB = 6$ سم، $BC = 8$ سم

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $E \in \overline{AC}$ أوجد طول كل من:

1 $\overline{BE}$ **2** $\overline{CE}$

8 في الشكل المقابل:



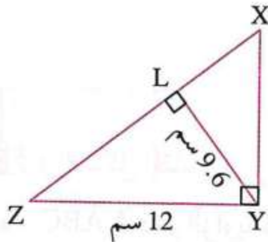
CAB مثلث قائم الزاوية فى A

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ، $E \in \overline{BC}$ ،

$AE = 9.6$ سم، $BC = 20$ سم

أوجد طول كل من: $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$

9 في الشكل المقابل:



XYZ مثلث فيه: $m(\angle Y) = 90°$

$\overline{YL} \perp \overline{XZ}$ حيث $L \in \overline{XZ}$

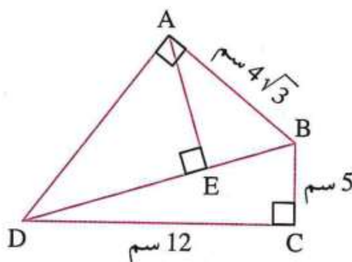
فإذا كان: $YZ = 12$ سم، $YL = 9.6$ سم فأوجد:

1 طول مسقط $\overline{YZ}$ على $\overleftrightarrow{XZ}$

2 طول مسقط $\overline{XY}$ على $\overleftrightarrow{XZ}$

3 طول مسقط $\overline{XZ}$ على $\overleftrightarrow{XY}$

10 في الشكل المقابل:



$m(\angle BCD) = m(\angle BAD) = 90°$ ، $\overline{AE} \perp \overline{DB}$

$BC = 5$ سم ، $CD = 12$سم، $AB = 4\sqrt{3}$ سم أوجد:

1 طول كل من $\overline{BD}$ ، $\overline{AD}$

2 طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BD}$

3 طول مسقط $\overline{AD}$ على $\overleftrightarrow{AE}$

11 فى الشكل المقابل:

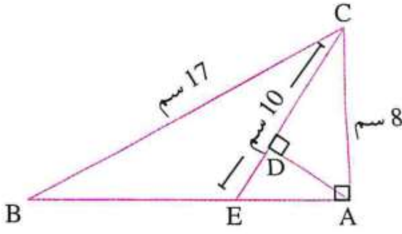
ABC مثلث قائم الزاوية فى A ، $\overline{AD} \perp \overline{CE}$

$AC = 8$ سم، $D \in \overline{CE}$ ، $E \in \overline{AB}$،

$BC = 17$ سم، $CE = 10$ سم أوجد:

1 طول مسقط $\overline{CE}$ على $\overleftrightarrow{AB}$

2 طول كل من: $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{EB}$



12 اكتشف الخطأ:

فى الشكل المقابل، ما طول $\overline{CB}$ ؟

أى من مجدى وإبراهيم إجابته صحيحة؟ ناقش.

حل مجدى:

$(CB)^2 = CD \times AD$

$= 5 \times 4 = 20$

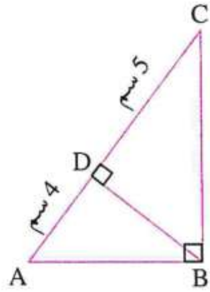
$\therefore CB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

حل إبراهيم:

$(CB)^2 = CD \times CA$

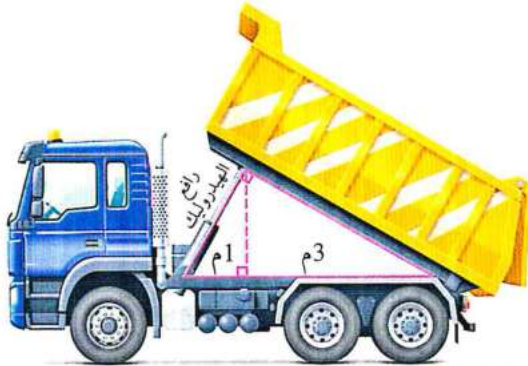
$= 5 \times 9 = 45$

$\therefore CB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



13 اقرأ ثم أجب:

كم يبلغ طول رافع الهيدروليك فى الوضع الموضح للسيارة المقابلة؟

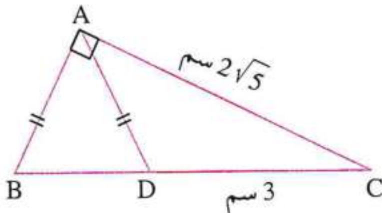


TIMSS تفكير إبداعى

14 فى الشكل المقابل:

ΔABC قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$

حيث $AB = AD$، أوجد طول $\overline{BD}$



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ABC مثلث قائم الزاوية فى B ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، فإن مسقط $\overline{BD}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ هو ....

(ا) $\{A\}$ (ب) $\{B\}$ (جـ) $\{C\}$ (د) $\{D\}$

2 إذا كان: $\frac{x}{12} = \frac{y}{8}$ فما قيمة $\frac{x}{y}$؟ ....

(ا) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{4}{3}$

3 إذا كان b وسطًا مناسبًا بين 12 , 3 فما قيمة b؟ ....

(ا) ± 4 (ب) ± 6 (جـ) ± 9 (د) ± 36

4 مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(ا) $<$ (ب) $>$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك

2 أكمل ما يأتى:

1 بالاستعانة بالشكل المقابل:

(ا) $(AD)^2 = \text{..........} \times DC$

(ب) $(AB)^2 = BD \times \text{..............}$

(جـ) مساحة المثلث ABC = ... سم^2

2 إذا كانت $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x + 4$ فإن قيمة:

$5f(2) + 2g(5)$ تساوى ....

3 أجب عما يأتى:

1 فى الشكل المقابل:

ABC مثلث قائم الزاوية فى A ، $\overline{AD} \perp \overline{CB}$

BD = 16 سم، CD = 9 سم،

أوجد طول كل من: $\overline{AB}$ ، $\overline{AD}$ ، $\overline{AC}$

2 إذا كانت R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ،

$Y = \{3, 5, 7\}$ وكان $(x \, R \, y)$ تعنى "أن $(x + y)$ عدد أولى"

لكل $x \in X$ ، $y \in Y$ فأجب عما يلي:

(ا) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (ب) مثل العلاقة بمخطط سهمى.

(جـ) أوجد مجال ومدى العلاقة. (د) هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

ذاكر الدرس 4

الدائرة
(The Circle)



نواتج التعلم



- يتعرف الطالب على مفهوم الدائرة.
- يتعرف الطالب على مفهوم قطر الدائرة ونصف قطرها.
- يستخدم الطالب الفرجار لرسم دائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها.
- يتعرف الطالب على الصيغة الرياضية لحساب كل من محيط ومساحة الدائرة.
- يحل الطالب مسائل تتضمن محيط ومساحة الدائرة.
- يستخدم الطالب الصيغة الرياضية لحساب كل من محيط ومساحة الدائرة فى حل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- الدائرة (The circle)
- نصف قطر الدائرة (Radius)
- محيط الدائرة (Circumference)
- مركز الدائرة (Center of the circle)
- قطر الدائرة (Diameter)
- مساحة الدائرة (Area of the circle)

فكر وناقش



قطعة أرض دائرية الشكل طول نصف قطرها 70 مترًا، تم إحاطتها بسور من الحديد،

هل يمكن حساب طول هذا السور؟

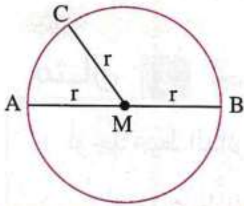


- **فى هذا الدرس سوف نتعلم مفهوم الدائرة والمفاهيم المرتبطة بها، وكيفية حساب محيطها ومساحتها، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.**

تعلم 1 الدائرة:

أولًا مفهوم الدائرة:

- الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.
- النقطة الثابتة تسمى "مركز الدائرة" ويرمز لها بأحد الحروف مثل الحرف "M".
- البعد الثابت يسمى طول نصف قطر الدائرة، ويرمز له بالحرف "r".
- تسمى الدائرة عادة بمركزها فنقول الدائرة M لنعنى الدائرة التى مركزها M.
- نصف قطر الدائرة هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أى نقطة عليها.



مثل كل من: $\overline{MA}$ ، $\overline{MB}$ ، $\overline{MC}$ حيث: $MA = MB = MC = r$

- قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين على الدائرة وتمر بمركزها.

مثل: $\overline{AB}$ قطر فى الدائرة M ويرمز لطول قطر الدائرة بالرمز d ويكون $d = 2r$

ثانيًا رسم الدائرة:

نستخدم المسطرة والفرجار لرسم الدائرة بمعلومية طول نصف قطرها.

مثـال 1 ارسم دائرة M طول نصف قطرها 3 سم

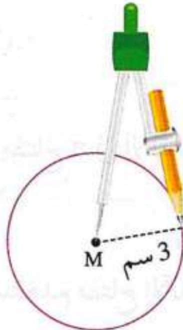
الحـل

لرسم الدائرة M التى طول نصف قطرها 3 سم، اتبع ما يلى:

1 نفتح الفرجار فتحة مقدارها 3 سم



2 نثبت سـن الفرجار عند النقطة M ثم ندير الفرجار دورة كاملة فنحصل على الدائرة المطلوبة.



نقاط هامة

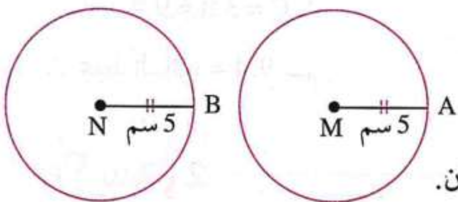
- يمكن رسم دائرة إذا علم طول قطرها (d) وذلك بحساب طول نصف قطرها (r)

باستخدام العلاقة: $r = \frac{d}{2}$

- الدوائر المتطابقة هى الدوائر التى لها أنصاف أقطار متساوية فى الطول.

فمثلًا: الدائرتان المتقابلتان التى طول نصف قطر كل منها 5 سم دائرتان متطابقتان.

حيث: $MA = NB = 5$ سم



سؤال 1

1 ارسم دائرة طول نصف قطرها 4 سم.

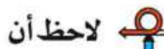
2 ارسم دائرة طول قطرها 7 سم.

تعلم 2 محيط الدائرة:

- محيط الدائرة (C): هو طول الخط المنحنى الذى يمثل الدائرة.
- النسبة بين محيط الدائرة (C) وطول قطرها (d) هى عدد غير نسبى

يرمز له بالرمز π

$$\frac{C}{d}=\pi \longrightarrow C=\pi d \longrightarrow C=2\pi r$$


لاحظ أن

العدد π عدد غير نسبى حيث:

$\pi \approx 3.141592654$

وهذه القيمة هى قيمة تقريبية للعدد π، ولسهولة الحسابات يمكننا استخدام القيم التقريبية التالية للعدد π:

$\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$ وهى القيم التقريبية الأكثر شيوعًا.

مثال 2 أجب عما يأتى:

1 أوجد محيط الدائرة التى طول نصف قطرها 7 سم. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

2 أوجد محيط الدائرة بدلالة π إذا كان طول نصف قطرها 12 سم.

3 أوجد محيط الدائرة التى طول قطرها 25 قدمًا. $(\pi \approx 3.14)$

4 أوجد محيط الدائرة بدلالة π إذا كان طول قطرها 6 بوصات.

الحـل

1
$\because C=2\pi r$
$\therefore C \approx 2\times\frac{22}{7}\times 7$
∴ محيط الدائرة ≈ 44 سم

2
$\because C=2\pi r$
$\therefore C=2\times\pi\times 12=24\pi$
∴ محيط الدائرة = 24π سم

3
$\because C=\pi d$
$\therefore C\approx 3.14\times 25$
∴ محيط الدائرة ≈ 78.5 قدم

4
$\because C=\pi d$
$\therefore C=6\pi$
∴ محيط الدائرة = 6π بوصة


لاحظ أن

يمكن استخدام مفتاح π فى الآلة الحاسبة للحصول على نتائج أكثر دقة.

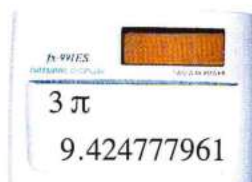
مثال 3 استخدم مفتاح الآلة π فى إيجاد محيط دائرة طول قطرها 3 سم مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

الحـل

$\because C=\pi d$

$\therefore C=3\pi\approx 9.4$

∴ محيط الدائرة ≈ 9.4 سم



سؤال 2

أوجد محيط الدوائر الآتية مستخدمًا مفتاح الالة π ومقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

1 دائرة طول نصف قطرها 9 سم

2 دائرة طول قطرها 215 سم

مثـال 4 أوجد طول نصف قطر الدائرة التى محيطها 15.7 سم. $(\pi \approx 3.14)$

الحـل

$\because C = 2\pi r$

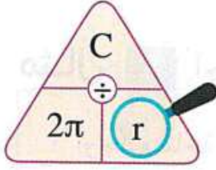
$\therefore 15.7 \approx 2 \times 3.14 \times r$

$\therefore 15.7 \approx 6.28\, r$

$\therefore r \approx \frac{15.7}{6.28}$

∴ طول نصف قطر الدائرة ≈ 2.5 سم

تنوع الاستراتيجيات



$\because r = \frac{C}{2\pi}$

$\therefore r \approx \frac{15.7}{2 \times 3.14}$

∴ طول نصف قطر الدائرة ≈ 2.5 سم

مثـال 5 دائرة محيطها π 15 قدم، أوجد طول نصف قطرها.

الحـل

$\because C = 2\pi r$

$\therefore 15\pi = 2\pi r \quad \therefore 2r = 15$

$\therefore r = \frac{15}{2} = 7.5$

∴ طول نصف قطر الدائرة = 7.5 قدم

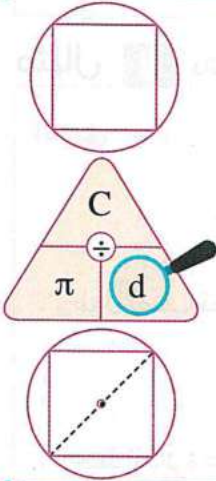
تنوع الإستراتيجيات

$\because r = \frac{C}{2\pi} = \frac{15\pi}{2\pi} = 7.5$

∴ طول نصف قطر الدائرة = 7.5 قدم

مثـال 6 فى الشكل المقابل:

دائرة محيطها π 24 سم، أوجد مساحة المربع.



الحـل

$\because d = \frac{C}{\pi} = \frac{24\pi}{\pi} = 24$

∴ طول قطر الدائرة = 24 سم.

∵ قطر الدائرة هو قطر المربع أيضًا كما هو موضح بالرسم المقابل:

$A = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \times (24)^2 = 288$

∴ مساحة المربع = 288 سم^2

مثـال 7

عجلة سيارة طول قطرها 70 سم، ما محيط العجلة؟ وإذا دارت العجلة دورة كاملة، فكم المسافة التى تقطعها السيارة؟ وكم دورة تحتاج إليها العجلة لتقطع 2.2 كم؟ $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

الحـل



$\because C = \pi d$

$\therefore C \approx \frac{22}{7} \times 70$

∴ محيط العجلة ≈ 220 سم.

∴ المسافة التى تقطعها السيارة إذا دارت العجلة دورة كاملة ≈ 220 سم ≈ 0.0022 كم.

∴ عدد الدورات ≈ $\frac{\text{2.2 كم}}{\text{0.0022 كم}}$ ∴ عدد الدورات ≈ 1,000 دورة.

سؤال 3

أوجد طول نصف قطر دائرة محيطها π 7 سم

تعلم 3 مساحة الدائرة:

• مساحة الدائرة (A): تساوى حاصل ضرب مربع طول نصف القطر فى النسبة التقريبية (π).

$$A = \pi r^2$$

مثال 8 أجب عما يأتى:

1 أوجد مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 3.5 سم $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

2 أوجد مساحة الدائرة التى طول قطرها 5.8 قدم بدلالة π.

3 استخدم مفتاح π بالآلة الحاسبة لإيجاد مساحة دائرة طول قطرها 19 بوصة مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

الحل

1
$\because A = \pi r^2$
$\therefore A \approx \frac{22}{7} \times (3.5)^2$
∴ مساحة الدائرة ≈ 38.5 سم^2

2
$\because r = \frac{d}{2} = \frac{5.8}{2} = 2.9$
$\therefore A = \pi r^2$
$\therefore A = \pi (2.9)^2 = 8.41\,\pi$
∴ مساحة الدائرة = 8.41 π قدم مربع

3
$\because r = \frac{d}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$
$\because A = \pi r^2$
$\therefore A = (9.5)^2\,\pi = 90.25\,\pi$
$A \approx 283.5$
∴ مساحة الدائرة ≈ 283.5 بوصة مربعة
لأقرب جزء من عشرة

مثال 9 دائرة مساحتها 49 π سم^2 ، أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيط الدائرة بدلالة π

الحل

$\because A = \pi r^2$
$\therefore \pi r^2 = 49\pi$
$\therefore r^2 = 49$
$\therefore r = \sqrt{49} = 7$ (حيث r أكبر من الصفر)

∴ طول نصف قطر الدائرة = 7 سم.

$\because C = 2\pi r$
$\therefore C = 2(7)\,\pi$
$\therefore C = 14\,\pi$

∴ محيط الدائرة = 14 π سم.

مثال 10 دائرة محيطها 20 π سم، احسب مساحتها. $(\pi \approx 3.14)$

الحل

$\because C = 2\pi r$
$\therefore 2\pi r = 20\pi$
$\therefore r = \frac{20}{2} = 10$

$\because A = \pi r^2$
$\therefore A \approx 3.14\,(10)^2$

∴ مساحة الدائرة ≈ 314 سم^2

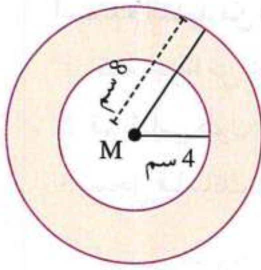
سؤال 4

1 أوجد مساحة الدائرة التى طول قطرها 10 سم. (علمًا بأن $\pi \approx 3.14$)

2 دائرة مساحتها 154 سم^2، أوجد طول قطرها. (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

مثال 11 في الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز طولا نصف قطريهما 4 سم، 8 سم، أوجد مساحة الجزء المظلل لأقرب جزء من عشرة.



الحل

- نوجد مساحة الدائرة الكبرى (حيث $r = 8$)

$\because A = \pi r^2$ $\quad \therefore A = (8)^2 \pi = 64\pi$

$\therefore$ مساحة الدائرة الكبرى $= 64\pi$ سم^2

- نوجد مساحة الدائرة الصغرى (حيث $r = 4$)

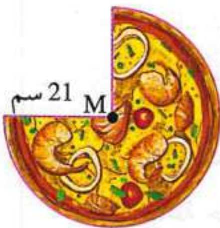
$\because A = \pi r^2$ $\quad \therefore A = (4)^2 \pi = 16\pi$

$\therefore$ مساحة الدائرة الصغرى $= 16\pi$ سم^2

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل ≈ 150.8 سم^2 (لأن: $64\pi - 16\pi = 48\pi \approx 150.8$)

مثال 12 الشكل المقابل:

فطيرة على شكل دائرة، قطع منها ما يمثل ربع الفطيرة، فإذا كان طول نصف قطرها 21 سم، فأوجد محيط ومساحة الجزء المتبقى. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$



الحل

- محيط الجزء المتبقى $= \frac{3}{4}$ محيط الدائرة $+ 2r$

$= 2r + 2\pi r \times \frac{3}{4} = 2r + \frac{3}{2}\pi r$

$= 2 \times 21 + \frac{3}{2} \times \pi \times 21 = 42 + 31.5\pi$

$\approx 42 + 31.5 \times \frac{22}{7}$

$\therefore$ محيط الجزء المتبقى ≈ 141 سم.

- مساحة الجزء المتبقى $= \frac{3}{4}$ مساحة الدائرة

$= \pi r^2 \times \frac{3}{4} = \pi (21)^2 \times \frac{3}{4} = 330.75\pi$

$\approx \frac{22}{7} \times 330.75$

$\therefore$ مساحة الجزء المتبقى ≈ 1039.5 سم^2

مثال 13

نافورة دائرية مركزها M وطول نصف قطرها 4 م، يراد عمل ممر دائرى حولها من البلاط بعرض 2 م، ما مساحة الممر بدلالة π؟



الحل

مساحة النافورة $= 16\pi$ م^2 (لأن: $A = \pi r^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi$)

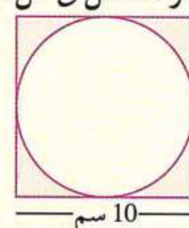
مساحة النافورة + الممر $= 36\pi$ م^2 (لأن: $A = \pi r^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$)

مساحة الممر بدلالة $\pi = 20\pi$ م^2 (لأن: $36\pi - 16\pi = 20\pi$)

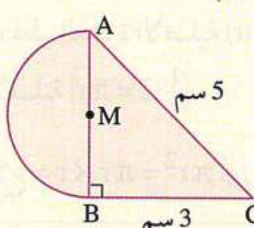
سؤال 5

أوجد مساحة الجزء المظلل فى كل مما يأتى: $(\pi \approx 3.14)$

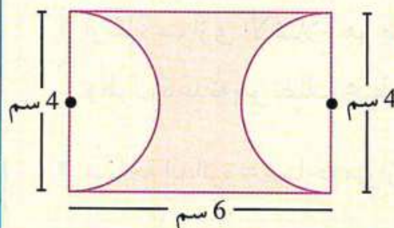
1



2



3



نشاط عملى 1 إيجاد النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها:

استخدم العديد من الأجسام الدائرية، مثل: طبق، ساعة حائط، عملة معدنية، قرص مدمج (CD)، وقم بما يلى:

1 اقطع جزءًا من خيط بطول محيط كل جسم، واستخدم مسطرة لقياس طول هذا الجزء إلى أقرب ملليمتر.

2 قم بقياس طول قطر كل جسم إلى أقرب ملليمتر.

3 سجل قياساتك فى الجدول التالى:









الجسم	محيط الدائرة (C)	طول قطر الدائرة (d)	$\frac{C}{d}$
طبق			
ساعة حائط			
عملة معدنية			
قرص مدمج			

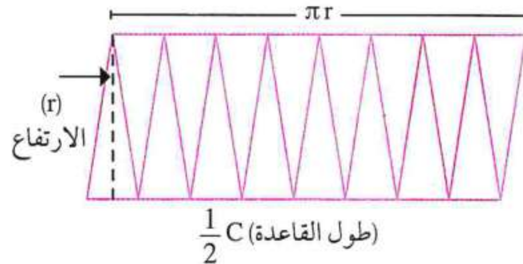
4 استخدم الآلة الحاسبة، وأوجد فى كل مرة نسبة محيط الدائرة إلى طول قطرها، وقرب النتائج إلى أقرب جزء من مائة، وسجل النتائج فى كل مرة فى العمود الأخير من الجدول السابق.

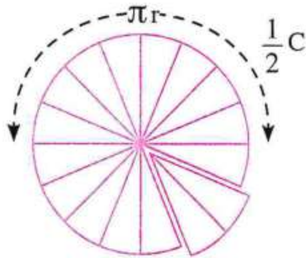
5 ماذا تلاحظ بشأن هذه النسبة؟

نشاط عملى 2 استنتاج الصيغة الرياضية لحساب مساحة الدائرة:

1 قم بطى قطعة من الورق على شكل دائرة إلى نصفين أربع مرات متتالية، لتقسيمها إلى 16 جزءًا متساويًا.

2 قم بقص كل جزء، ثم أعد تجميع وترتيب الأجزاء لتكوين شكل جديد أقرب إلى متوازى الأضلاع.





3 ارتفاع متوازى الأضلاع هو طول نصف قطر الدائرة الأصلية (r).

وطول قاعدته هو نصف محيط الدائرة الأصلية $\left(\frac{1}{2}C = \pi r\right)$.

4 مساحة الدائرة = مساحة متوازى الأضلاع = $\pi r \times r = \pi r^2$ أى أن $A = \pi r^2$

تدرَّب الدرس 4

الدائرة (The Circle)

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲ تقييم ▲ ابتكار

أسئلة الكتاب المدرسى

الدائرة:

1 أكمل ما يأتى:

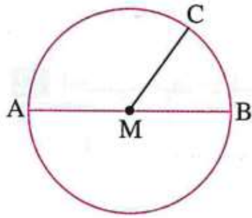
1 .... هى مجموعة نقاط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.

2 .... هو قطعة مستقيمة مرسومة بين مركز الدائرة وأى نقطة عليها.

3 .... هو قطعة مستقيمة تمر بمركز الدائرة ومرسومة بين أى نقطتين على الدائرة.

4 دائرة طول نصف قطرها 6 سم، فإن طول قطرها = ...

5 من الشكل المقابل:



(أ) $\overline{AB}$ يسمى .... (ب) M تسمى ....

(جـ) $\overline{MA}$ يسمى .... (د) .... = ... = MC

(هـ) .... = 2 MC

2 ارسم كما المطلوب:

1 ارسم الدائرة M التى طول نصف قطرها 3 سم.

2 ارسم الدائرة M التى طول نصف قطرها 4.5 سم.

3 ارسم الدائرة M التى طول قطرها 10 سم.

محيط الدائرة:

3 أوجد محيط الدائرة التى طول قطرها 12 سم وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

4 أوجد بدلالة π محيط الدائرة التى طول نصف قطرها 3.5 قدم.

5 أوجد محيط الدائرة التى طول نصف قطرها 14 سم. (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

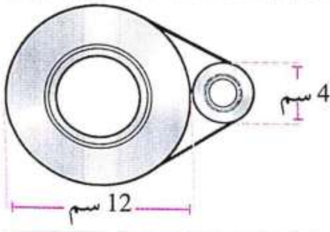
6 أوجد محيط الدائرة التى طول قطرها 15.4 سم باستخدام مفتاح π بالآلة الحاسبة لأقرب جزء من عشرة.

7 أوجد طول قطر الدائرة إذا كان محيطها 88 سم. (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

8 أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان محيطها 31.4 سم . (علمًا بأن $\pi \approx 3.14$)

9 إذا كان طول نصف قطر عجلة دراجة 42 سم، فإذا دارت العجلة دورة كاملة، فما المسافة التى ستقطعها وما عدد الدورات التى تدورها العجلة لتقطع مسافة 132 مترًا؟ (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

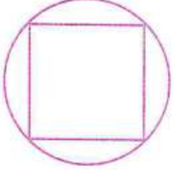
10 أوجد عدد الدورات التى تدورها البكرة الصغرى عندما تدور البكرة الكبرى 8 دورات كاملة.



11 فى الشكل المقابل:

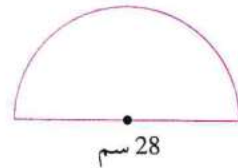
إذا كان محيط الدائرة 75.36 سم،

فأوجد مساحة المربع. (علمًا بأن $\pi \approx 3.14$)

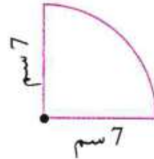


12 احسب محيط الأشكال المظللة الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة: (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

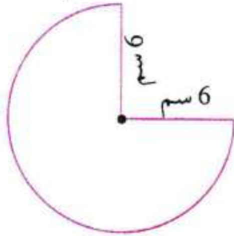
1



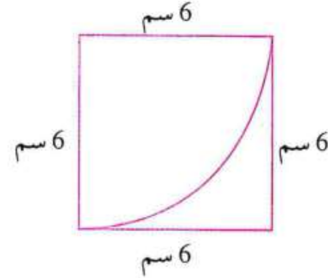
2



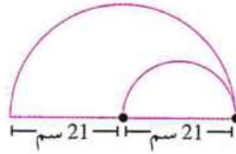
3



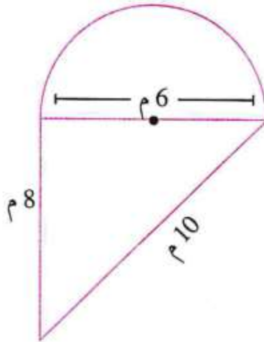
4



5



6



مساحة الدائرة:

13 أوجد مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 6.3 سم لأقرب جزء من عشرة (باستخدام مفتاح π بالآلة الحاسبة).

14 أوجد بدلالة π مساحة الدائرة التى طول قطرها 8 بوصات.

15 دائرة مساحتها 36π م^2، أوجد طول نصف قطرها، ثم أوجد محيطها بدلالة π

16 دائرة محيطها 18.84 سم، أوجد طول نصف قطرها ومساحتها (علمًا بأن: $\pi \approx 3.14$).

17 دائرة مساحتها 78.5 قدم مربع، أوجد طول نصف قطرها ومحيطها (علمًا بأن: $\pi \approx 3.14$).

18 اختر الإجابة الصحيحة:

1 في أي دائرة، ما قيمة $\frac{C}{d}$ ؟ ....

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{2}{\pi}$ (جـ) $2\,\pi$ (د) π

2 دائرتان مساحتهما π 36 سم^2 ، π 81 سم^2، فما النسبة بين محيطيهما؟ ....

(أ) $2 : 3$ (ب) $4 : 9$ (جـ) $4 : 5$ (د) $9 : 16$

3 دائرة محيطها π 12 سم، فما مساحتها؟ ....

(أ) 4π سم^2 (ب) 36π سم^2 (جـ) 24π سم^2 (د) 144π سم^2

4 إذا كان طول قطر عمله معدنية 2.5 سم، فإن محيط العملة = ... سم.

(أ) 1.25π (ب) 5π (جـ) 4π (د) 2.5π

5 ما محيط الدائرة التي طول قطرها 12 سم؟ ....

(أ) 3π سم (ب) 6π سم (جـ) 12π سم (د) 36π سم

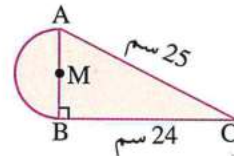
6 ما طول قطر دائرة مساحتها π 36 بوصة مربعة؟ ....

(أ) 6 بوصات (ب) 12 بوصة (جـ) 18 بوصة (د) 36 بوصة

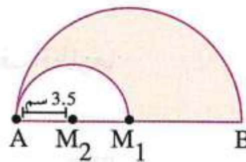
19 حمام سباحة دائري مركزه M وطول نصف قطره 5 م، يراد عمل ممشى دائري حول حمام السباحة من السيراميك بعرض 1 م، فما مساحة الممر بدلالة π ؟

20 أوجد مساحة ومحيط الجزء المظلل في كل مما يأتي. (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

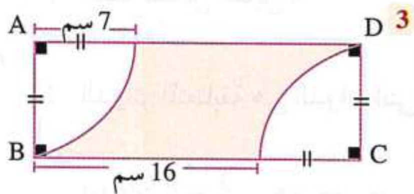
1



2

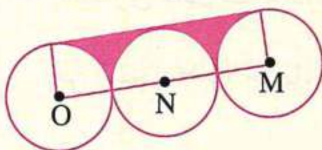


3



تفكير إبداعي TIMSS

21 يبين الشكل المقابل 3 دوائر متطابقة M ، N ، O وطول نصف قطر كل دائرة 10 سم، أوجد مساحة الأجزاء المظللة. ($\pi \approx 3.14$)



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 دائرة طول نصف قطرها 5 سم، فما طول قطرها؟ ....

(أ) 2.5 سم　(ب) 3 سم　(جـ) 10 سم　(د) 4 سم

2 محيط دائرة طول قطرها 7 سم يساوى ....

(أ) 14π سم　(ب) 49π سم　(جـ) 22π سم　(د) 7π سم

3 ما مساحة دائرة طول نصف قطرها 8 بوصات؟ ....

(أ) 16π بوصة مربعة　(ب) 64π بوصة مربعة　(جـ) 64π بوصة　(د) 16π بوصة

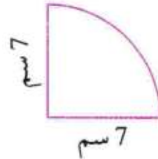
4 ما مجال الدالة $\{(2 , 7) , (3 , 8) , (5 , 10)\}$؟ ....

(أ) $\{8 , 5 , 10\}$　(ب) $\{2 , 5 , 3\}$　(جـ) $\{8 , 10 , 7\}$　(د) $\{5 , 3\}$

5 دائرتان محيطهما π 4 سم، π 6 سم، فما النسبة بين مساحتيهما؟ ....

(أ) $4 : 6$　(ب) $4 : 9$　(جـ) $2 : 3$　(د) $3 : 2$

2 أكمل ما يأتى:



1 محيط الشكل المقابل ≈ .... (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

2 الدوائر المتطابقة هى الدوائر التى أنصاف أقطارها ....

3 إذا كان $\frac{3}{m} = \frac{5}{n}$ ، $n - m = 6$ ، فإن .... $m =$

3 أجب عما يأتى:

1 اشــترى عادل ســجادة دائرية طول قطرها 2 متر، ما مساحة الســجادة لأقرب متر مربع؟ وإذا كانت تكلفة المتر المربع من السجادة 150 جنيهًا، فما التكلفة الإجمالية لأقرب جنيه؟ (علمًا بأن $\pi \approx 3.14$)

2 دائرة طولها نصف قطرها 7 سم، أوجد محيطها ومساحتها بدلالة π

3 أوجد مجموعة حل المتباينة $2x + 3 \geq 15$ فى R

ذاكر
الدرس 5

الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم الجزء 1
(Right Circular Cylinder and Right Prism)

نواتج التعلم



- يتعرف الطالب على مفهوم الأسطوانة الدائرية القائمة.
- يحسب الطالب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ومساحتها الجانبية والكلية.
- يستخدم الطالب قوانين حساب الحجم والمساحة الجانبية والكلية للأسطوانة الدائرية القائمة في حل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- الأسطوانة (**Cylinder**)
- الحجم (**Volume**)
- المساحة الجانبية (L.A) (**Lateral Area**)
- المساحة الكلية (S.A) (**Surface Area**)

فكر وناقش

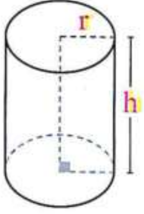


يستخدم أحد محال المشروبات أكوابًا أسطوانية الشكل ارتفاعها 10 سم، وطول نصف قطر قاعدتها 3.5 سم، فإذا أراد صاحب المحل طباعة شعار على السطح الجانبي لكل كوب، **فكم تبلغ المساحة المتاحة للطباعة للكوب الواحد؟**



- في هذا الدرس سوف تتعلم حساب الحجم والمساحة الجانبية والكلية للأسطوانة الدائرية القائمة، **مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.**

تعلم | **الأسطوانة الدائرية القائمة:**

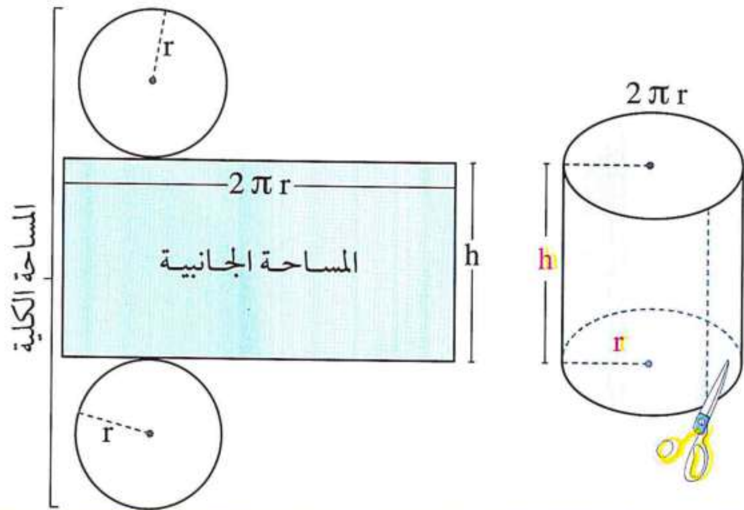


- الأسطوانة الدائرية القائمة هى مجسم ثلاثى الأبعاد له قاعدتان دائريتان متوازيتان ومتطابقتان، ويكون سطحه الجانبى عموديًّا على القاعدتين.
- ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة هو طول العمود المرسوم بين مركزى قاعدتيها ويرمز له بالرمز (h).

أمثلة للأسطوانة الدائرية القائمة:



حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ومساحتها الجانبية والكلية:



لاحظ أن

عند فرد الأسطوانة الدائرية القائمة نحصل على سطح مستطيل بالإضافة إلى سطحى دائرتين هما قاعدتا الأسطوانة.

- إذا كان طول نصف قطر القاعدة الدائرية هو r وارتفاع الأسطوانة هو h، فإن:
  - محيط القاعدة الدائرية = $2\pi r$
  - مساحة القاعدة الدائرية = πr^2

وبالتالى يكون:

- حجم الأسطوانة (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع، أى أن: $V = \pi r^2 h$
- المساحة الجانبية للأسطوانة (L.A) = محيط القاعدة × الارتفاع، أى أن: $L.A = 2\pi rh$
- المساحة الكلية للأسطوانة (S.A) = المساحة الجانبية للأسطوانة + ضعف مساحة القاعدة

أى أن: $S.A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

ويطلق على المساحة الكلية أحيانًا المساحة السطحية.

نقاط هامة

- إذا زاد ارتفاع الأسطوانة (h) إلى الضعف (2h)، فإن حجم الأسطوانة يصبح ضعف حجمها الأصلى: $V = 2\pi r^2 h$
- إذا زاد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة (r) إلى الضعف (2r)،

  فإن حجم الأسطوانة يصبح أربعة أمثال حجمها الأصلى: $V = \pi\,(2r)^2\,h = 4\pi\,r^2\,h$
- إذا زاد كل من ارتفاع الأسطوانة (h) وطول نصف قطر قاعدة الأسطوانة (r) إلى الضعف،

  فإن حجم الأسطوانة يصبح ثمانية أمثال حجمها الأصلى: $V = \pi\,(2r)^2\,(2h) = 8\pi\,r^2\,h$

مثـال 1 فى الشكل المقابل:



احسب الحجم والمساحة الجانبية والكلية للأسطوانة الدائرية القائمة مستخدمًا مفتاح الآلة π ومقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

الحـل

∵ طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة (r) = 3 بوصات ، الارتفاع (h) = 8 بوصات.

$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (3)^2 (8) = 72\pi \approx 226.2$

∴ حجم الأسطوانة ≈ 226.2 بوصة مكعبة.

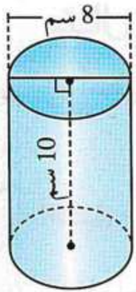
$\therefore L.A = 2\pi rh = 2\pi (3)(8) = 48\pi \approx 150.8$

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة ≈ 150.8 بوصة مربعة.

$\therefore S.A = 2\pi r(h + r) = 2\pi (3)(8 + 3) = 66\pi \approx 207.3$

∴ المساحة الكلية للأسطوانة ≈ 207.3 بوصة مربعة.

مثـال 2 فى الشكل المقابل:



أوجد الحجم والمساحة الجانبية والسطحية للأسطوانة الدائرية القائمة بدلالة π

الحـل

∵ طول قطر القاعدة = 8 سم

∴ طول نصف قطر القاعدة (r) = $\frac{8}{2}$ = 4 سم ، الارتفاع (h) = 10 سم

$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (4)^2 (10) = 160\pi$

∴ حجم الأسطوانة = 160π سم^3

$\therefore L.A = 2\pi rh = 2\pi (4)(10) = 80\pi$

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = 80π سم^2

$\therefore S.A = 2\pi r(h + r) = 2\pi (4)(10 + 4) = 112\pi$

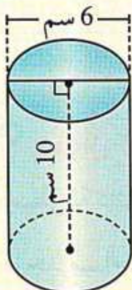
تنوع إستراتيجيات

$\therefore S.A = L.A + 2\pi r^2 = 80\pi + 2(4)^2\pi$

$= 80\pi + 32\pi = 112\pi$

∴ المساحة السطحية للأسطوانة = 112π سم^2

س؟ سؤال 1



فى الشكل المقابل:

أوجد الحجم والمساحة الجانبية والسطحية للأسطوانة الدائرية القائمة بدلالة π

مثـال 3

أسطوانة دائرية قائمة حجمها 565.2 سم^3، وارتفاعها 5 سم، **احسب مساحة الأسطوانة الكلية**. (علمًا بأن: $\pi \approx 3.14$)

الحـل

∵ حجم الأسطوانة = 565.2 سم^3 ، ارتفاع الأسطوانة (h) = 5 سم.

$\because V = \pi r^2 h$ $\quad \therefore 565.2 = \pi r^2 (5)$ $\quad \therefore 565.2 = 5\pi r^2$

$\therefore r^2 = \frac{565.2}{5\pi}$ $\quad \therefore r = \sqrt{\frac{565.2}{5\pi}} \approx \sqrt{\frac{565.2}{5 \times 3.14}}$

∴ طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ≈ 6 سم

$\therefore S.A = 2\pi r (h + r) = 2\pi (6)(5 + 6) = 132\pi \approx 132 \times 3.14$

∴ المساحة الكلية للأسطوانة ≈ 414.48 سم^2

مثـال 4

أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية 110 م^2، وطول قطر قاعدتها 10 م، **أوجد حجم الأسطوانة ومساحتها الكلية**.

(علمًا بأن: $\pi \approx \frac{22}{7}$)

الحـل

∵ المساحة الجانبية للأسطوانة = 110 م^2 ، طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة (r) = $\frac{10}{2} = 5$ م

$\because L.A = 2\pi r h$ $\quad \therefore 110 = 2\pi (5) h$ $\quad \therefore 110 = 10\pi h$

$\therefore h = \frac{110}{10\pi} = \frac{11}{\pi}$

∴ ارتفاع الأسطوانة = $\frac{11}{\pi}$ م

$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (5)^2 (\frac{11}{\pi}) = 275$

∴ حجم الأسطوانة = 275 م^3

$\therefore S.A = 110 + 2\pi r^2$

$= 110 + 2\pi(5)^2 = 110 + 50\pi \approx 110 + 50\left(\frac{22}{7}\right)$

∴ المساحة الكلية للأسطوانة ≈ $267\frac{1}{7}$ م^2

سؤال 2

أسطوانة دائرية قائمة حجمها 502.4 سم^3 وارتفاعها 4 سم،

أوجد مساحة الأسطوانة الكلية لأقرب جزء من عشرة.

مثـال 5

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 10 أمتار، وطول نصف قطر قاعدتها يساوي نصف ارتفاعها،

احسب حجمها بالمتر المكعب بدلالة π

الحـل

∵ ارتفاع الأسطوانة (h) = 10 متر ، طول نصف قطر قاعدتها (r) = $\frac{1}{2}$h = 5 أمتار

$\because V = \pi r^2 h$ $\therefore V = \pi \times (5)^2 \times 10$

$\therefore V = 250\,\pi$

∴ حجم الأسطوانة = 250 π م^3

مثـال 6

أسطوانة دائرية قائمة حجمها 64 π م^3، وطول نصف قطر قاعدتها يساوي ارتفاعها، **احسب مساحتها الجانبية بدلالة π**

الحـل

∵ حجم الأسطوانة (V) = 64 π م^3 ، طول نصف قطر قاعدتها (r) = الارتفاع (h)

$\because V = \pi r^2 h$ $\therefore 64\not\pi = \not\pi r^2 (r)$

$\therefore r^3 = 64$ $\therefore r = \sqrt[3]{64} = 4$

∴ ارتفاع الأسطوانة = طول نصف قطر قاعدتها = 4 أمتار.

$\therefore L.A = 2\pi r h = 2\pi(4)(4) = 32\,\pi$

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = 32 π م^2

مثـال 7

أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 8 سم، وارتفاعها 15 سم، فإذا زاد طول نصف قطر قاعدتها بنسبة 50% وظل ارتفاعها ثابتًا، **احسب حجم الأسطوانة بعد الزيادة.** (حيث إن: π ≈ 3.14)

الحـل

∵ طول نصف قطر القاعدة (r) = 8 سم ، ارتفاع الأسطوانة (h) = 15 سم

∴ طول نصف قطر القاعدة بعد زيادة بنسبة 50% = 8 + 4 = 12 سم

$\because V = \pi r^2 h$ $\therefore V = \pi \times 12^2 \times 15$

$\therefore V = 2{,}160\,\pi \approx 2{,}160 \times 3.14$

∴ حجم الأسطوانة بعد زيادة طول نصف القطر ≈ 6782.4 سم^3

سؤال 3

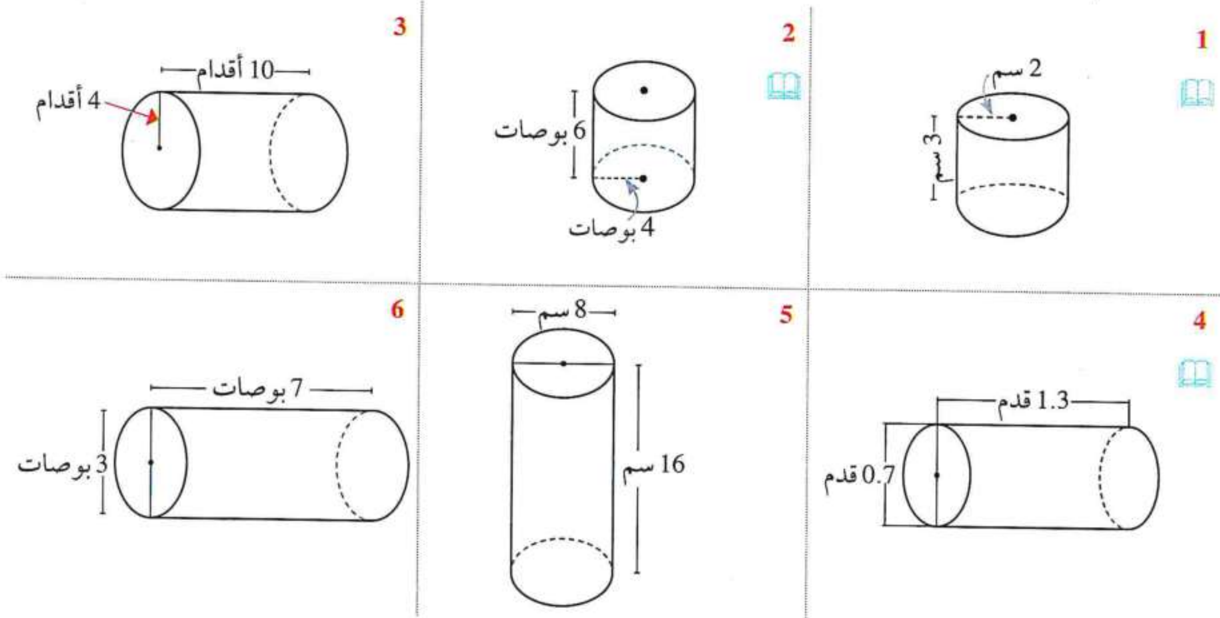
أسطوانة دائرية قائمة حجمها 216 π سم^3 وطول نصف قطر قاعدتها يساوي ارتفاعها، **احسب مساحتها الكلية.**

(حيث إن: π ≈ 3.14)

أسئلة الكتاب المدرسي

الأسطوانة الدائرية القائمة

1 أوجد الحجم والمساحة الكلية (السطحية) لكل مما يأتي بدلالة π:



2 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 5 سم وارتفاعها 14 سم، أوجد حجمها، ومساحتها الجانبية. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

3 أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 10 أقدام وارتفاعها 6 أقدام،
أوجد حجمها ومساحتها السطحية لأقرب جزء من عشرة. (مستخدمًا مفتاح الآلة الحاسبة π)

4 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 924 سم^3، وارتفاعها 6 سم، أوجد مساحتها الجانبية. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

5 أسطوانة دائرية قائمة حجمها π 250 سم^3، وارتفاعها 10 سم، أوجد مساحتها السطحية بدلالة π

6 أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية 220 م^2، وطول قطر قاعدتها 14 م، أوجد حجمها ومساحتها الكلية. $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

7 أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية 376.8 سم^2 و طول نصف قطر قاعدتها 10 سم، أوجد مساحتها الكلية. $(\pi \approx 3.14)$

8 أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية π 120 سم^2 وطول نصف قطر قاعدتها 5 سم، أوجد حجمها بدلالة π

9 أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 12 سم، وطول نصف قطر قاعدتها يساوى نصف ارتفاعها، احسب حجمها بدلالة π

10 أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها، فإذا كان حجمها 27π سم^3، فأوجد مساحتها الجانبية بدلالة π

11 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 12 سم وارتفاعها 22 سم، فإذا زاد طول نصف قطر قاعدتها بنسبة 25% وظل ارتفاعها ثابتًا، فاحسب حجم الأسطوانة بعد الزيادة بدلالة π

12 خزان ماء أسطوانى، طول نصف قطر قاعدته 0.5 متر وارتفاعه 1.2 متر، فإذا أراد مجدى طلاء سطحه الجانبى بطلاء، سعر المتر المربع منه 210 جنيهات، فكم تكلفة الطلاء؟

13 **اختر الإجابة الصحيحة:**

1 أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 10 سم وارتفاعها 15 سم، ما حجمها؟ ....

(أ) 75π سم^3 (ب) 150π سم^3 (جـ) 375π سم^3 (د) 150π سم^3

2 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 5 سم وارتفاعها 15 سم، ما مساحتها السطحية؟ ....

(أ) 75π سم^2 (ب) 200π سم^2 (جـ) 250π سم^2 (د) 375π سم^2

3 أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 6 بوصات وطول نصف قطر قاعدتها يساوى نصف ارتفاعها، فما حجمها؟ .... بوصة مكعبة

(أ) 18π (ب) 36π (جـ) 54π (د) 108π

4 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 320π سم^3، وارتفاعها 20 سم، فما طول قطر قاعدتها؟ ....

(أ) 2 سم (ب) 4 سم (جـ) 8 سم (د) 16 سم

5 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوى ارتفاعها، فإذا كان حجمها 125π سم^3، فما مساحتها الجانبية؟ ....

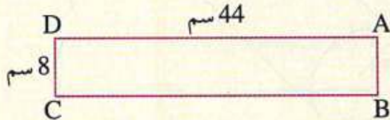
(أ) 150π سم^2 (ب) 215π سم^2 (جـ) 100π سم^2 (د) 50π سم^2

6 إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة تساوى $2\pi r^2$ سم، فما ارتفاعها؟ ....

(أ) $\frac{1}{2}r$ سم (ب) $\frac{3}{4}r$ سم (جـ) r سم (د) $2r$ سم

تفكير إبداعى TIMSS

14 الشكل المقابل يمثل قطعة من الورق على شكل مستطيل ABCD طويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة بحيث ينطبق $\overline{AB}$ على $\overline{DC}$، أوجد حجم الأسطوانة الناتجة $(\pi \approx \frac{22}{7})$.



15 **اختر الإجابة الصحيحة:**

إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى أربعة أمثال محيط قاعدة الأسطوانة (C)، فما حجم الأسطوانة بدلالة (C)؟

(أ) $\frac{C^3}{\pi}$ (ب) $\frac{2C^3}{\pi}$ (جـ) $\frac{2C^2}{\pi^2}$ (د) $4\pi C^3$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 4 سم، وارتفاعها 5 سم، فما حجمها؟ ....

(أ) 20π سم^3 (ب) 9π سم^3 (جـ) 80π سم^3 (د) 40π سم^3

2 أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 12 سم، وارتفاعها 14 سم، فما مساحتها الجانبية؟ .... $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

(أ) 528 سم^2 (ب) 1,584 سم^2 (جـ) 1,056 سم^2 (د) 825 سم^2

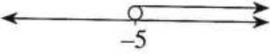
3 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 120π سم^3، وارتفاعها 30 سم، فما طول قطر قاعدتها؟ ....

(أ) 2 سم (ب) 4 سم (جـ) 8 سم (د) 16 سم

4 إذا كان $a > b$ ، فإن $b - c$ .... $a - c$

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) غير ذلك.

5 فى الشكل المقابل: أى من المتباينات الآتية يُعبر عن مجموعة الحل فى R؟ ....



(أ) $x > -5$ (ب) $x < -5$ (جـ) $x \geq -5$ (د) $x \leq -5$

2 أكمل ما يأتى:

1 أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية 70π سم^2، وارتفاعها 7 سم، فإن طول نصف قطرها = ... سم.

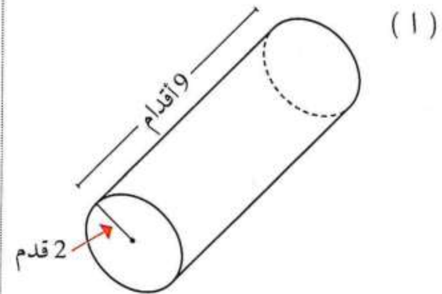
2 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 6 - x$ يقطع محور X فى النقطة ....

3 الوسط المتناسب بين العددين –27 ، –3 هو ....

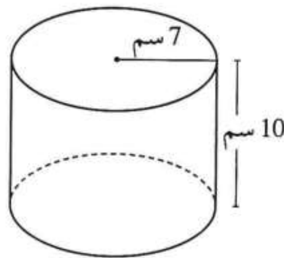
3 أجب عما يأتى:

1 أوجد الحجم والمساحة الجانبية بدلالة π لكل ما يأتى:

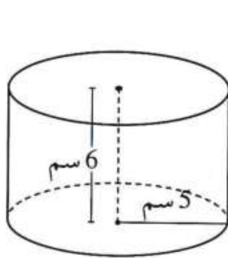
(أ)



(ب)



(جـ)



2 إذا كانت b وسطًا متناسبًا بين a , c فاثبت أن: $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c}$

ذاكر | الدرس 5

الأسطوانة الدائرية القائمة والمنشور القائم الجزء 2
(Right Circular Cylinder and Right Prism)





نواتج التعلم

- يُعرف الطالب مفهوم المنشور القائم.
- يحسب الطالب حجم المنشور القائم ومساحته الجانبية والكلية.
- يستخدم الطالب قوانين حساب الحجم والمساحة الجانبية والكلية للمنشور القائم فى حل مشكلات حياتية.

مفردات أساسية

- المنشور (**Prism**)
- الحجم (**Volume**)
- المساحة الجانبية (**Lateral area**)
- المساحة الكلية (**Surface area**)



فكر وناقش

محميـة وادى دجلة هى محمية طبيعية تقع فى منطقة المعادى شرق القاهرة، وتتميز بتكويناتها الصخرية القديمة من الحجر الجيرى، وتعيش فيها أنواع مختلفة من النباتات والحيوانات البرية، مثل الغزلان والثعالب، وتُعد مكانًا متميزًا لمحبى التخييم واستكشاف الطبيعة.

قام أسامة بإنشاء خيمة على شكل منشور ثلاثى قائم مصنوعة من القماش، هل يمكنك حساب المساحة الكلية للقماش المستخدم فى صناعة الخيمة؟

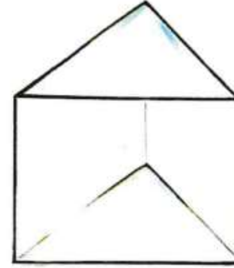


- فى هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية حساب الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية للمنشور القائم، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم | المنشور القائم:

- المنشور القائم: هو مجسم ثلاثى الأبعاد له قاعدتان متطابقتان ومتوازيتان، كل منهما مضلع، وأحرفه الجانبية عمودية على قاعدتيه.
- جميع الأوجه الجانبية للمنشور القائم مستطيلات.
- ارتفاع المنشور القائم هو طول أى حرف جانبى.

أمثلة للمنشور القائم، ويسمى المنشور بناءً على شكل قاعدته كما يلى:



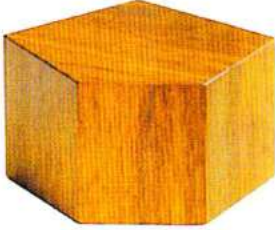
القاعدة مثلث

«منشور ثلاثى»



القاعدة شكل رباعى

«منشور رباعى»



القاعدة شكل خماسى

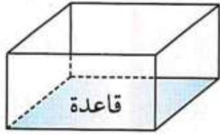
«منشور خماسى»

حجم المنشور القائم ومساحته الجانبية والكلية:

الحجم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية
h منشور ثلاثى	المساحة الجانبية h	المساحة الجانبية h المساحة الكلية
h منشور رباعى	المساحة الجانبية h	المساحة الجانبية h المساحة الكلية
h منشور خماسى	المساحة الجانبية h	المساحة الجانبية h المساحة الكلية
حجم المنشور القائم (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية للمنشور القائم (L.A) = محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الكلية للمنشور القائم (S.A) = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة



نقاط هامة



- إذا كانت جميع أوجه المنشــور القائم عبارة عن مســتطيلات كما فى متوازى المستطيلات المقابل فجميعها تصلح لأن تكون قاعدة هذا المنشور وعند حساب المساحة الجانبية يجب تحديد القاعدة.
- تعتبر الأسطوانة الدائرية القائمة حالة خاصة للمنشور القائم الذى قاعدته مضلع منتظم أضلاعه عددها لا نهائى (فيصبح دائرة).



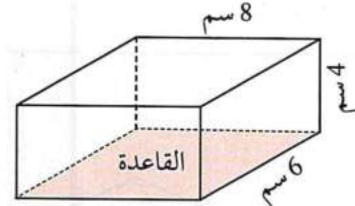
تذكر أن

- محيط أى شكل = مجموع أطوال أضلاعه
- محيط المضلع المنتظم = طول الضلع × عدد الأضلاع
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع
- مساحة المستطيل = الطول × العرض
- محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه
- مساحة شبه المنحرف = نصف مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

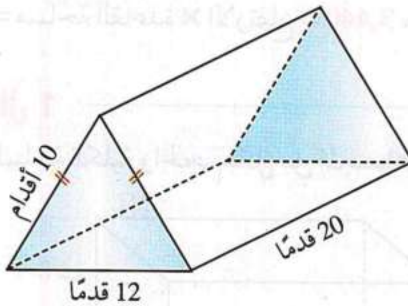
مثال 1

أوجد المساحة الكلية (السطحية) والحجم لكل من المجسمات الآتية:

1



2



الحل

1 القاعدة على شكل مستطيل ، الطول = 8 سم ، العرض = 6 سم

- محيط القاعدة = 28 سم (لأن: $2(l+w) = 2 \times (8+6) = 2 \times 14 = 28$)
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = 112 سم^2 (لأن: $28 \times 4 = 112$)
- مساحة القاعدة = 48 سم^2 (لأن: $l \times w = 8 \times 6 = 48$)
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

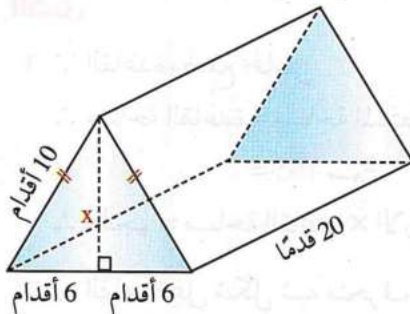
= 208 سم^2 (لأن: $112 + (2 \times 48) = 112 + 96 = 208$)

- الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

= 192 سم^3 (لأن: $48 \times 4 = 192$)

2 نلاحظ أن القاعدة على شكل مثلث متساوى الساقين، وبالتالى نسقط من رأس المثلث عمودًا على القاعدة

ومن نظرية فيثاغورس: $x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$



محيط القاعدة = 32 قدم (لأن: $12 + 10 + 10 = 32$)

- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= 640 قدمًا مربعة (لأن: $32 \times 20 = 640$)

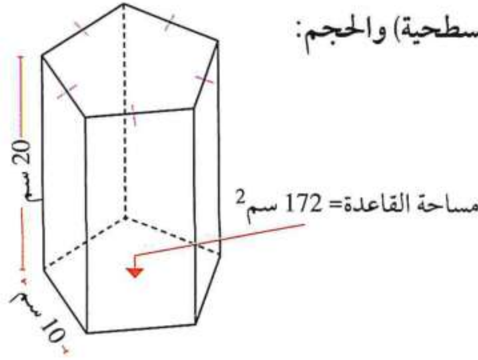
- مساحة القاعدة = 48 قدمًا مربعة (لأن: $\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$)
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

= 736 قدمًا مربعة (لأن: $640 + (2 \times 48) = 640 + 96 = 736$)

- الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = 960 قدمًا مكعبة (لأن: $48 \times 20 = 960$)

مثال 2 في الشكل التالي:

أوجد المساحة الكلية (السطحية) والحجم:



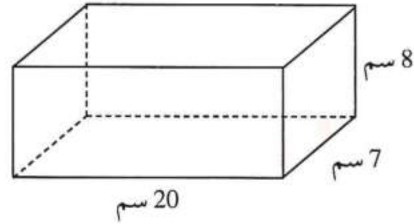
الحل

- محيط القاعدة (خماسي منتظم) = طول الضلع × 5 = 50 سم (لأن: $5 \times 10 = 50$)
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = 1,000 سم^2 (لأن: $50 \times 20 = 1,000$)
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة = 1,344 سم^2 (لأن: $1,000 + (2 \times 172) = 1,000 + 344 = 1,344$)
- الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = 3,440 سم^3 (لأن: $172 \times 20 = 3,440$)

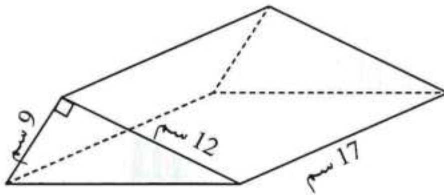
سؤال 1

أوجد المساحة الكلية والحجم لكل من المجسمات الآتية:

1

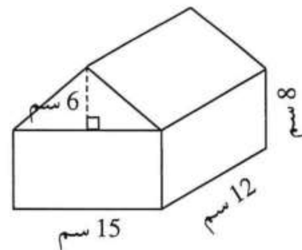


2

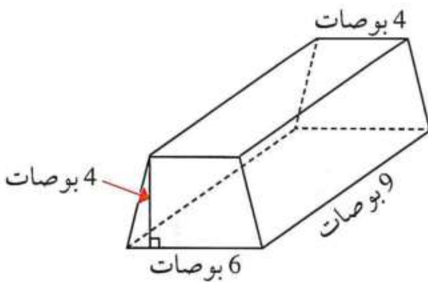


مثال 3 أوجد حجم المجسمات الآتية:

1



2



الحل

1 ∵ القاعدة مضلع خماسي

∴ مساحة القاعدة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

= 165 سم^2 (لأن: $(15 \times 8) + \left(\frac{1}{2} \times 15 \times 6\right) = 120 + 45 = 165$)

∴ الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = 1,980 سم^3 (لأن: $165 \times 12 = 1,980$)

2 ∵ القاعدة على شكل شبه منحرف

∴ مساحة القاعدة (شبه المنحرف) = 20 بوصة مربعة (لأن: $\frac{1}{2} \times (6+4) \times 4 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$)

∴ الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = 180 بوصة مكعبة (لأن: $20 \times 9 = 180$)

مثـال 4 أجب عما يأتى:

1 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 9 سم، 5 سم ومساحته الكلية 566 سم^2، **أوجد حجمه.**

2 منشور رباعى قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 4 سم وحجمه 192 سم^3، **أوجد مساحته السطحية.**

الحـل

1 ∵ مساحة القاعدة = 9 × 5 = 45 سم^2 ، محيط القاعدة = 28 سم (لأن: $2(9+5)=28$)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

= 566 سم^2

$\therefore (28 \times h) + (2 \times 45) = 566$ $\therefore 28h + 90 = 566$

$\therefore 28h = 566 - 90$ $\therefore 28h = 476$

$\therefore \frac{28h}{28} = \frac{476}{28}$ $\therefore h = 17$

∴ حجم المنشور = 765 سم^3 (لأن: $45 \times 17 = 765$)

2 ∵ مساحة القاعدة = 4 × 4 = 16 سم^2 ،

حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع = 192 سم^3

$\therefore 16 \times h = 192$

$\therefore \frac{16h}{16} = \frac{192}{16}$ $\therefore h = 12$

∴ الارتفاع = 12 سم

- محيط القاعدة = 4 × 4 = 16 سم
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = 192 سم^2 (لأن: $16 \times 12 = 192$)

∴ المساحة السطحية = 224 سم^2 (لأن: $192 + (2 \times 16) = 192 + 32 = 224$)

مثـال 5

قاعدة منشور ثلاثى هى مثلث قائم الزاوية، طول وتره 5 م،
وطول أحد ضلعى القائمة 4 م،
فإذا كان ارتفاع المنشور 10 م، **فما حجمه؟**

نقاط هامة

مساحة المثلث القائم الزاوية
= $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب طولى ضلعى القائمة

الحـل

من نظرية فيثاغورث : طول ضلع القائمة الآخر = 3 م (لأن: $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$)

∴ مساحة القاعدة (مساحة المثلث) = 6 م^2 (لأن: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$)

∴ الحجم = 60 م^3 (لأن: $6 \times 10 = 60$)

س؟ سؤال 2

1 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 12 سم، 8 سم، ومساحته الكلية 276 سم^2، أوجد حجمه.

2 قاعدة منشـــور ثلاثى هى مثلث قائم الزاوية ، طول وتره 25 سم، وطول أحد أضلاعه 24 سم، فإذا كان ارتفاع المنشور 16 سم، فما حجمه؟

مثال 6 أجب عما يأتى:

1 منشور خماسى قائم ارتفاعه 15 سم، وحجمه 330 سم^3، **احسب مساحة قاعدته.**

2 منشور خماسى قائم قاعدته مضلع خماسى منتظم مساحته 7 سم^2، ومساحة أحد المستطيلات الجانبية 16 سم^2، **فما المساحة الكلية للمنشور؟**

الحل

1 مساحة قاعدة المنشور = $\frac{\text{حجم المنشور}}{\text{الارتفاع}}$ = 22 سم^2 (لأن: $\frac{330}{15} = 22$)

2 المساحة الجانبية = 80 سم^2 (لأن: $16 \times 5 = 80$)

المساحة الكلية = 94 سم^2 (لأن: $80 + (2 \times 7) = 80 + 14 = 94$)

نقاط هامة

- المنشور الخماسى المنتظم ذو الجوانب المستطيلة جميع جوانبه الخمسة المستطيلة متطابقة ومتساوية فى المساحة، وبالتالى فإن: مساحة الجانبية = 5 × مساحة الوجه الجانبى الواحد.

مثال 7 أجب عما يأتى:

1 مكعب من المعدن مجموع أطوال أحرفه 144 سم ، صُهر وصُنع من مادته 16 منشورًا متطابقًا، قاعدة كل منها على شكل مربع طول ضلعه 6 سم ، أوجد ارتفاع كل منشور (علمًا بأنه لم يفقد أى شىء من المعدن أثناء الانصهار والتحويل).

2 منشور خماسى قائم مصنوع من المعدن مساحة قاعدته 66 سم^2 وارتفاعه 12 سم، صُهر وحُول إلى أسطوانات دائرية قائمة متطابقة، ارتفاع كل منها 7 سم ، وطول نصف قطر قاعدتها 3 سم، أوجد عدد الأسطوانات الدائرية القائمة.

(مستخدمًا الرمز π على الآلة الحاسبة)

الحل

1 ∵ طول حرف المكعب = $\frac{\text{مجموع أطوال أحرفه}}{\text{عدد أحرفه}}$ = 12 سم (لأن: $\frac{144}{12} = 12$)

∴ حجم المكعب = 1,728 سم^3 (لأن: $S^3 = 12^3 = 1{,}728$)

∵ حجم 16 منشورًا متطابقًا = حجم المكعب = 1,728 سم^3

∴ حجم المنشور الواحد = 108 سم^3 (لأن: $1{,}728 \div 16 = 108$)

∴ مساحة قاعدة المنشور = 36 سم^2 (لأن: $6 \times 6 = 36$)

∴ ارتفاع المنشور (h) = $\frac{\text{الحجم}}{\text{مساحة القاعدة}}$ = 3 سم (لأن: $108 \div 36 = 3$)

2 ∵ حجم المنشور الخماسى = 792 سم^3 (لأن: $66 \times 12 = 792$)

∵ حجم الأسطوانة = 63 π سم^3 (لأن: $\pi \times 3^2 \times 7 = \pi \times 9 \times 7 = 63\pi$)

∴ عدد الأسطوانات الدائرية القائمة = $\frac{\text{حجم المنشور الخماسى}}{\text{حجم الأسطوانة الواحدة}}$ ≈ 4 أسطوانات (لأن: $\frac{792}{63\pi} \approx 4$)

سؤال 3

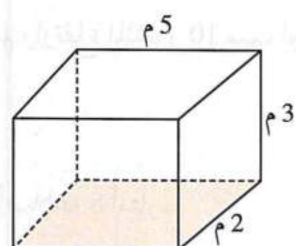
1 منشور خماسى قائم ارتفاعه 18 بوصة، وحجمه 1,116 بوصة مكعبة، **احسب مساحة قاعدته.**

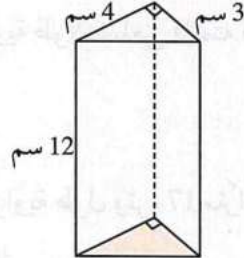
2 سبيكة على شكل منشور ثلاثى قاعدته مثلث قائم الزاوية، وطولا ضلعى القائمة 9 سم، 12 سم، وارتفاع المنشور 20 سم، صُهر وحُول إلى مكعبات طول حرف كل منها 3 سم، **أوجد عدد المكعبات.** (علمًا بأنه لم يفقد أى شىء أثناء الانصهار والتحويل).

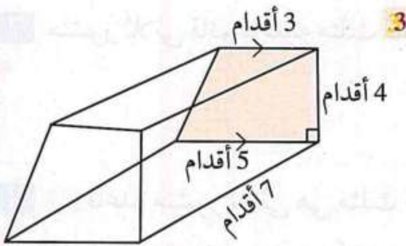
أسئلة الكتاب المدرسى

المنشور القائم

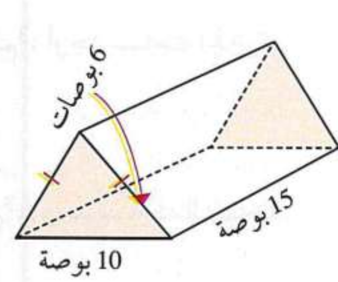
1 أوجد الحجم لكل من المجسمات التالية:

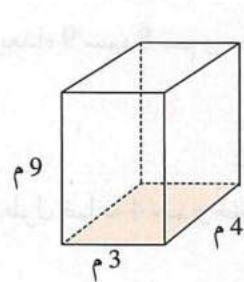
1


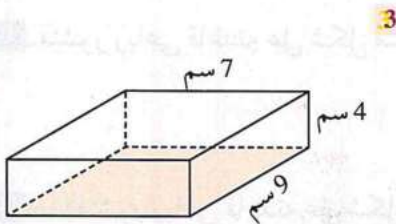
2


3


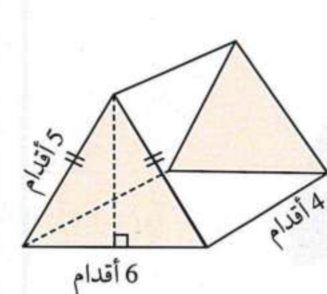
2 أوجد المساحة الجانبية لكل مجسم مما يأتى:

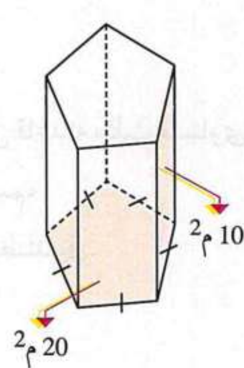
1


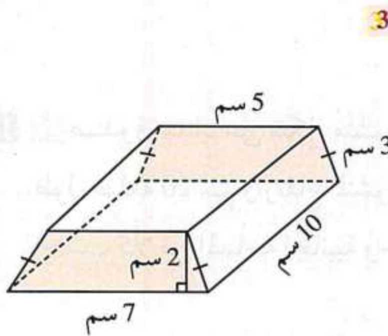
2


3


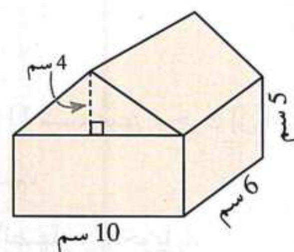
3 أوجد المساحة الكلية لكل مجسم مما يأتى:

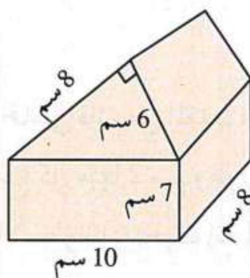
1


2


3


4 أوجد حجم المنشور الخماسى فى كل مما يأتى:

1


2


5 منشور رباعى قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 6 سم وارتفاعه 4 سم، أوجد حجمه.

6 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل طول بعديه 3 سم، 4 سم وارتفاع المنشور 5 سم، أوجد حجمه ومساحته الكلية.

7 منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى قائمته 5 سم ، 12 سم وارتفاع المنشور 10 سم، أوجد حجمه.

8 قاعدة منشور ثلاثى هى مثلث قائم الزاوية طول وتره 17 مترًا وطول أحد أضلاعه 8 أمتار،
إذا كان ارتفاع المنشور 12 مترًا، فما حجمه؟

9 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 9 سم، 8 سم وحجمه 720 سم^3، أوجد مساحته الجانبية.

10 منشور رباعى قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 4 سم وحجمه 192سم^3، أوجد مساحته السطحية.

11 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 5 سم، 4 سم، ومساحته الكلية 130 سم^2، أوجد حجمه.

12 صندوق هدايا على شكل منشور ثلاثى قاعدته مثلث متساوى الأضلاع
طول ضلعه 20 سم وارتفاع المنشور 10 سم،
احسب كلًّا من المساحة الجانبية وحجم الصندوق.



13 سبيكة على شكل منشور ثلاثى قائم قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعى القائمة 6 سم، 8 سم وارتفاع المنشور 4 سم،
صُهرت وحولت إلى مكعبات طول حرف كل منها 2 سم، أوجد عدد المكعبات.

14 منشور خماسى قائم من المعدن مساحة قاعدته 105 سم^2 وارتفاعه 11 سم، صُهر وحول إلى أسطوانات دائرية قائمة
متطابقة ارتفاع كل منها 2 سم وطول نصف قطر قاعدة كل منها 3.5 سم،
أوجد عدد الأسطوانات (حيث إنه لم يفقد أى شىء من المعدن أثناء الانصهار والتحويل). (علمًا بأن: $\pi \approx \frac{22}{7}$)

15 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 45π سم^3 وارتفاعها 5 سم وطول نصف قطر قاعدتها يساوى طول حرف مكعب، احسب المساحة الكلية للمكعب.

16 **اختر الإجابة الصحيحة:**

1 منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 10 سم، إذا كان ارتفاع المنشور 8 سم، فما حجمه؟ ....

(أ) 80 سم^3 (ب) 160 سم^3 (جـ) 320 سم^3 (د) 800 سم^3

2 إذا كانت قاعدة منشور قائم عبارة عن مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 5 سم، وكان ارتفاع المنشور يساوى 4 سم، فما المساحة الجانبية للمنشور؟ ....

(أ) 15 سم^2 (ب) 30 سم^2 (جـ) 60 سم^2 (د) 240 سم^2

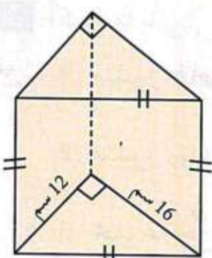
3 منشور خماسى قائم قاعدته مضلع خماسى منتظم مساحته 10م2، ومساحة أحد المستطيلات الجانبية 9م2، فما المساحة الكلية للمنشور؟ ....

(أ) 19 م^2 (ب) 38 م^2 (جـ) 55 م^2 (د) 65 م^2

4 منشور خماسى قائم ارتفاعه 8 سم، وحجمه 168 سم3، فما مساحة قاعدته؟ ....

(أ) 1,344 سم^2 (ب) 176 سم^2 (جـ) 21 سم^2 (د) 18 سم^2

5 فى الشكل المقابل:



ما حجم المنشور الثلاثى القائم؟ ....

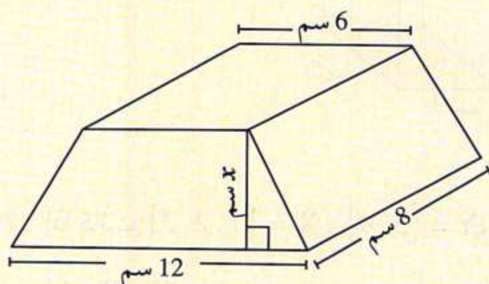
(أ) 1,960 سم^3 (ب) 1,920 سم^3

(جـ) 1,260 سم^3 (د) 960 سم^3

تفكير إبداعى TIMSS

17 مكعب من المعدن مجموع أطوال أحرفه 72 سم، صُهر وصُنع من مادته 8 منشورات متطابقة قاعدة كل منها على شكل مربع طول ضلعه 3 سم، **أوجد ارتفاع كل منشور.**

18 قطعة من الشيكولاتة على شكل منشور رباعى حجمه 360 سم^3، **أوجد قيمة x**



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مستطيل بعداه 6 سم، 4 سم وارتفاع المنشور 5 سم، فما حجمه؟ ....

(أ) 130 سم^3 (ب) 120 سم^3 (جـ) 110 سم^3 (د) 100 سم^3

2 منشور ثلاثى قائم قاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه 4 سم وارتفاع المنشور 6 سم، فما مساحته الجانبية؟ ....

(أ) 24 سم^2 (ب) 48 سم^2 (جـ) 36 سم^2 (د) 72 سم^2

3 منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مستطيل بعداه 7 سم ، 5 سم، وحجمه 175 سم^3، فإن ارتفاعه يساوى .... سم.

(أ) 10 (ب) 5 (جـ) 3 (د) 15

4 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 7 سم وارتفاع الأسطوانة 8 سم، فإن مساحتها الكلية ≈ .... سم^2. (علمًا بأن $\pi \approx \frac{22}{7}$)

(أ) 56 (ب) 1,232 (جـ) 660 (د) 1,540

5 إذا كان $f(x) = 2x + 1$، فما قيمة $3f(2)$؟ ....

(أ) 3 (ب) 5 (جـ) 15 (د) 8

2 أكمل ما يأتى:

1 منشور خماسى قائم مساحة قاعدته 20 سم^2 وارتفاعه 3 سم، فإن حجمه = ... سم^3

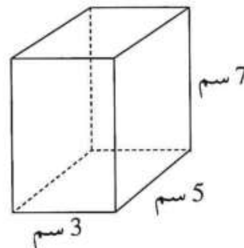
2 منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 5 سم وارتفاعه 3 سم ، فإن مساحة الكلية = ... سم^2

3 مجموعة حل المتباينة $-2 < x + 4 < 1$ فى R هى ....

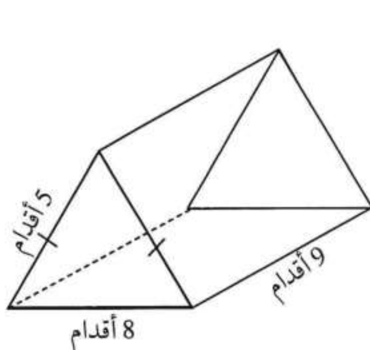
3 أجب عما يأتى:

1 أوجد المساحة الجانبية لكل مما يأتى:

(أ)



(ب)



2 إذا كانت $X = \{1, 2, 3\}$ ، $Y = \{5, 9\}$، فأوجد:

(أ) $X \times Y$ (ب) Y^2

ذاكر الدرس 6

البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى
(The Distance between Two Points in the Coordinate Plane)





نواتج التعلم

- يعرف الطالب الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى.
- يستخدم الطالب الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى حل المشكلات الحياتية.

مفردات أساسية

- البعد بين نقطتين (**The distance between two points**)
- المستوى الإحداثى (**The coordinate plane**)

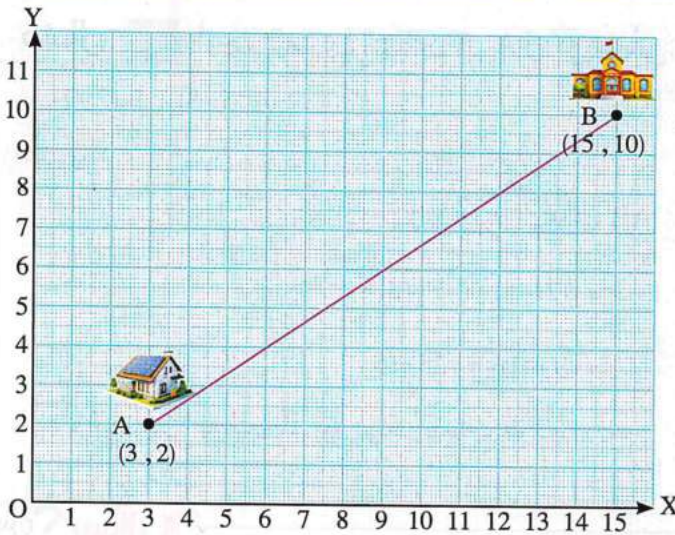


فكر وناقش

إذا كان موضع منزل مريم عند النقطة A (3 , 2)،

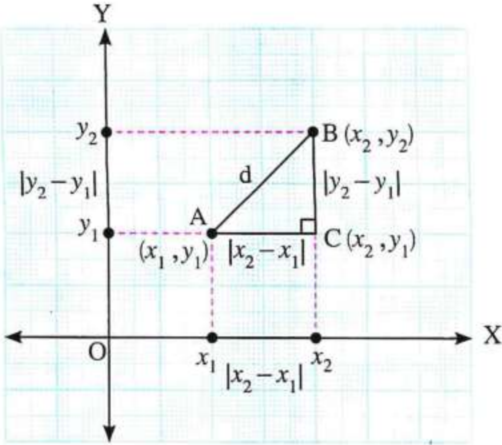
وموضع مدرستها عند النقطة B (15 , 10)،

هل يمكنك معرفة المسافة بين منزل مريم ومدرستها؟



- فى هذا الدرس، سوف تتعرف على الصيغة الرياضية لحساب البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى، **مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.**

تعلم البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى:



على المستوى الإحداثى المقابل:

بفرض أن: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ والمسافة بينهما d

نجد أن: $C(x_2, y_1)$

ويكون: $AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$

وباستخدام نظرية فيثاغورس فى Δ ABC القائم الزاوية فى C نجد أن:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$\therefore (AB)^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وبالتالى فإن: المسافة (d) بين النقطتين $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

تُعطى بالصيغة الرياضية: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نقاط هامة

- إذا كانت: $x \geq 0$ فإن: $|x| = x$
- إذا كانت: $x \leq 0$ فإن: $|x| = -x$
- $(|x|)^2 = |x| \times |x| = |x^2| = x^2$ لأن: $x^2 \geq 0$
- $(|x_1 - x_2|)^2 = (x_1 - x_2)^2$, $(|y_1 - y_2|)^2 = (y_1 - y_2)^2$

وبالتالى يمكننا كتابة القانون بالصيغة: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

مثال 1 أوجد البُعد بين النقطتين A , B فى كل مما يأتى:

1 A (5 , 3) , B (2 , 7)

2 A (8 , −4) , B (−7 , 4)

الحل

1 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(2-5)^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

∴ البُعد بين النقطتين A , B هو 5 وحدات طول

2 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-7-8)^2 + (4-(-4))^2}$

$= \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

∴ البُعد بين النقطتين A , B هو 17 وحدة طول

س؟ سؤال 1

1. **أوجد** البعد بين النقطتين A (3 , 5) , B (−2 , −3)
2. **أوجد** طول $\overline{AB}$ إذا كانت A (4 , 2) , B (0 , −1)

مثال 2

إذا كانت $A(3,1)$, $B(1,2)$, $C(5,4)$ ، اثبت أن: $BC = 2AB$

الحل

$$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\therefore BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore BC = 2AB$$

مثال 3

1 إذا كان البُعد بين النقطتين $A(-1,3)$, $B(k,5)$ يساوى $2\sqrt{5}$ وحدة طول، **فأوجد قيم k الممكنة.**

2 إذا كان طول $\overline{AB} = 5$ وحدات طول، وكانت $A(k,5)$, $B(3k-1,1)$ ، **فأوجد قيم k الممكنة.**

الحل

1

$$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore \sqrt{(k+1)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{(k+1)^2 + 4} = 2\sqrt{5}$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore (k+1)^2 + 4 = 20$$

$$\therefore (k+1)^2 = 20 - 4$$

$$\therefore (k+1)^2 = 16$$

$$\therefore k+1 = \pm 4$$

$\therefore k+1 = 4$ أو $\therefore k+1 = -4$

$\therefore k = 4-1$ | $\therefore k = -4-1$

$\therefore k = 3$ | $\therefore k = -5$

$\therefore$ قيم k الممكنة هى $3 , -5$

2

$$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore \sqrt{(3k-1-k)^2 + (1-5)^2} = 5$$

$$\therefore \sqrt{(2k-1)^2 + 16} = 5$$

بتربيع الطرفين

$$\therefore (2k-1)^2 + 16 = 25$$

$$\therefore (2k-1)^2 = 25 - 16$$

$$\therefore (2k-1)^2 = 9$$

$$\therefore 2k-1 = \pm 3$$

$\therefore 2k-1 = 3$ أو $\therefore 2k-1 = -3$

$\therefore 2k = 3+1$ | $\therefore 2k = -3+1$

$\therefore \frac{2k}{2} = \frac{4}{2}$ | $\therefore \frac{2k}{2} = \frac{-2}{2}$

$\therefore k = 2$ | $\therefore k = -1$

$\therefore$ قيم k الممكنة هى $2 , -1$

سؤال 2

1 إذا كان البعد بين النقطتين $(k,7)$ ، $(3,0)$ هو 5 وحدات طول، **أوجد قيم k الممكنة.**

2 إذا كانت النقطة $A(15,-9)$ تقع على بُعدين متساويين من النقطتين $B(-5,K)$, $C(8,15)$ ، **أوجد قيم k الممكنة.**

مثـال 4

أوجد محيط Δ ABC الذى فيه: A (5 , 6) , B (29 , 13) , C (5 , 31)

الحـل

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(29-5)^2 + (13-6)^2} = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25$

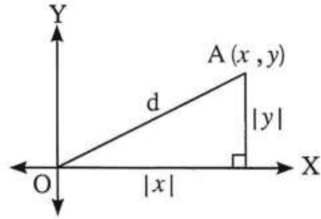
$\therefore BC = \sqrt{(5-29)^2 + (31-13)^2} = \sqrt{576+324} = \sqrt{900} = 30$

$\therefore AC = \sqrt{(5-5)^2 + (31-6)^2} = \sqrt{0+625} = \sqrt{625} = 25$ أو $AC = |31-6| = 25$

∵ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

∴ محيط Δ ABC = 25 + 30 + 25 = 80 وحدة طول.

البعد بين نقطة ونقطة الأصل:



- المسافة "d" بين النقطة A (x , y) ونقطة الأصل O (0 , 0) تعطى بالصيغة الرياضية:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثـال 5

إذا كانت B (6 , –8) ، d بعد النقطة B عن نقطة الأصل، احسب d

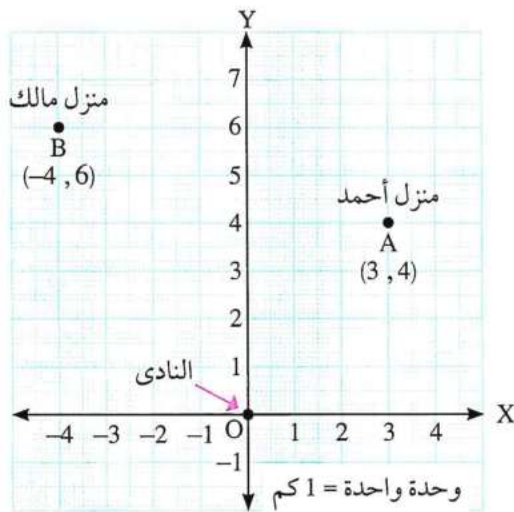
الحـل

$\because d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

∴ بعد النقطة B عن نقطة الاصل = 10 وحدات طول

مثـال 6

يوضح الشكل المقابل موضعى منزل أحمد (A) ومنزل مالك (B) بالنسبة لموضع النادى (O)، أى المنزلين أقرب إلى النادى؟



الحـل

$\because d = \sqrt{x^2 + y^2}$

البُعد بين موضع منزل أحمد (A) وموضع النادى (O)

$AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

∴ منزل أحمد يبعد عن النادى مسافة 5 كم

البُعد بين موضع منزل مالك (B) وموضع النادى (O)

$BO = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52} \approx 7.2$

∴ منزل مالك يبعد عن النادى مسافة 7.2 كم تقريبًا

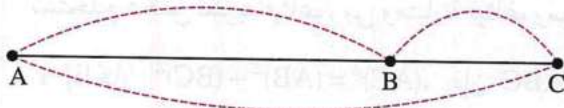
∴ موضع منزل أحمد (A) أقرب إلى موضع النادى من منزل مالك (B)



نقاط هامة

- لأى ثلاث نقاط A , B , C، إذا كان طول $\overline{AC}$ أكبر من طول كل من $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ فإن:

1 النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة،



إذا كان: $AB + BC = AC$

2 النقط A , B , C هى رءوس مثلث، إذا كان: $AB + BC > AC$ من متباينة المثلث

مثال 7

1 باستخدام قانون البُعد بين نقطتين، أثبت أن النقط: A (1 , 2) , B (3 , 1) , C (–3 , 4) تقع على استقامة واحدة.

2 باستخدام قانون البُعد بين نقطتين، أثبت أن النقط: A (2 , –2) , B (–1 , 3) , C (–4 , –5) هى رءوس مثلث.

الحل

1

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\therefore BC = \sqrt{(-3-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\therefore AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\because AB + AC = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\therefore AB + AC = BC$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة حيث $A \in \overline{BC}$

2

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\therefore BC = \sqrt{(-4+1)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73} \approx 8.5$

$\therefore AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$

$\because AB + AC = \sqrt{34} + \sqrt{45} \approx 12.5$

$\therefore AB + AC > BC$

∴ النقط A , B , C هى رءوس مثلث

مثال 8

باستخدام قانون البُعد بين نقطتين، هل النقط A (5 , –5) , B (–1 , 7) , C (15, 15) تقع على استقامة واحدة؟

الحل

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

$\therefore BC = \sqrt{(15+1)^2 + (15-7)^2} = \sqrt{256+64} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

$\therefore AC = \sqrt{(15-5)^2 + (15+5)^2} = \sqrt{100+400} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

$\because AB + BC = 6\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 14\sqrt{5}$

$\therefore AB + BC > AC$



∴ A , B , C ليست على استقامة واحدة، وهى رءوس مثلث لأنها تحقق متباينة المثلث.



نقاط هامة

- لتحديد نوع المثلث ABC بالنسبة لقياسات زواياه حيث طول $\overline{AC}$ أكبر من طولى الضلعين الآخرين، نستخدم عكس نظرية فيثاغورس ومتباينة فيثاغورس كما يلى:

1 إذا كان: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$، فإن: Δ ABC قائم الزاوية فى B — **عكس فيثاغورس**

2 إذا كان: $(AC)^2 > (AB)^2 + (BC)^2$، فإن: Δ ABC منفرج الزاوية فى B — **متباينة فيثاغورس**

3 إذا كان: $(AC)^2 < (AB)^2 + (BC)^2$، فإن: Δ ABC حاد الزوايا — **متباينة فيثاغورس**

مثال 9

1 **أثبت أن المثلث ABC الذى رءوسه:**

A (1 , 4) , B (−1 , −2) , C (2 , −3)، قائم الزاوية، ثم أوجد مساحته.

2 **بين نوع المثلث ABC الذى رءوسه:**

A (1 , 1) , B (4 , 1) , C (5 , 4) من حيث قياسات زواياه.

الحل

1

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore (AB)^2 = (-1-1)^2 + (-2-4)^2 = 4 + 36 = 40$

$\therefore (BC)^2 = (2+1)^2 + (-3+2)^2 = 9 + 1 = 10$

$\therefore (AC)^2 = (2-1)^2 + (-3-4)^2 = 1 + 49 = 50$

$\because (AB)^2 + (BC)^2 = 40 + 10 = 50$

$\therefore (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$\therefore$ Δ ABC قائم الزاوية فى B

$\because AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ ,\ BC = \sqrt{10}$

$\therefore$ مساحة المثلث ABC = $\frac{1}{2} \times AB \times BC$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10}$

= 10 وحدات مربعة.

2

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore (AB)^2 = (4-1)^2 + (1-1)^2 = 9 + 0 = 9$

$\therefore (BC)^2 = (5-4)^2 + (4-1)^2 = 1 + 9 = 10$

$\therefore (AC)^2 = (5-1)^2 + (4-1)^2 = 16 + 9 = 25$

$\because (AB)^2 + (BC)^2 = 9 + 10 = 19$

$\therefore (AC)^2 > (AB)^2 + (BC)^2$

$\therefore$ Δ ABC منفرج الزاوية فى B

سؤال 3

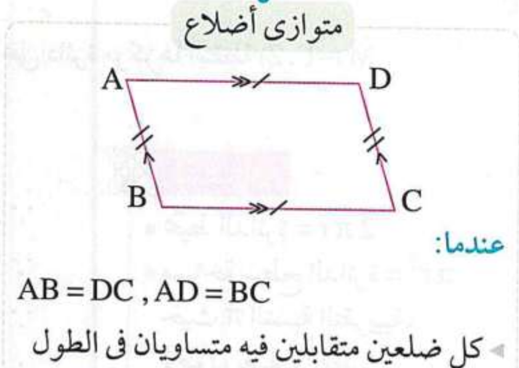
1 أثبت أن النقط: A (3 , 5) , B (3 , −2) , C (−2 , −4)، هى رءوس مثلث، ثم بين نوعه بالنسبة لقياسات زواياه.

2 أثبت أن المثلث OBC الذى رءوسه B (3 , 3) , O (0 , 0) , C (0 , 6)، قائم الزاوية ثم أوجد مساحته.

نقاط هامة

- إذا كان: ABCD شكلًا رباعيًا، وباستخدام قانون البُعد بين نقطتين، فإن الشكل ABCD يكون:

متوازى أضلاع

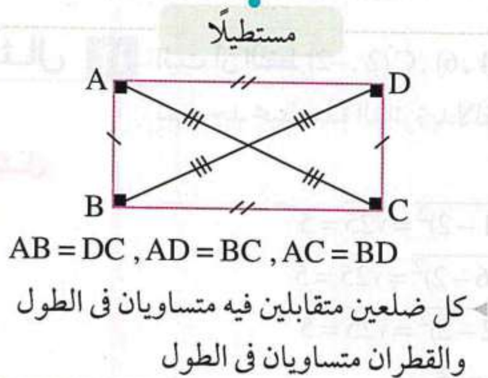


عندما:

AB = DC , AD = BC

◂ كل ضلعين متقابلين فيه متساويان فى الطول

مستطيلًا



AB = DC , AD = BC , AC = BD

◂ كل ضلعين متقابلين فيه متساويان فى الطول والقطران متساويان فى الطول

مثال 10

1 أثبت أن النقط:

A(3 , –2) , B (–5 , 0) , C (0 , –7) , D (8 , –9)

رءوس متوازى أضلاع ABCD مستخدمًا قانون البعد بين نقطتين.

2 باستخدام قانون البعد بين نقطتين أثبت أن النقط:

A(–4 , –1) , B (–6 , 5) , C (–3 , 6) , D (–1 , 0)

رءوس مستطيل ABCD ، وأوجد مساحته.

الحل

1

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(-5-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$\therefore BC = \sqrt{(0+5)^2 + (-7-0)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$\therefore CD = \sqrt{(8-0)^2 + (-9+7)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$\therefore AD = \sqrt{(8-3)^2 + (-9+2)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$\because AB = CD , BC = AD$

∴ النقط A , B , C , D هى رءوس متوازى أضلاع.

2

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(-6+4)^2 + (5+1)^2}$

$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\therefore BC = \sqrt{(-3+6)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\therefore CD = \sqrt{(-1+3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\therefore AD = \sqrt{(-1+4)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\therefore AC = \sqrt{(-3+4)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\therefore BD = \sqrt{(-1+6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\because BC = AD \;,\; AB = CD \;,\; AC = BD$

∴ النقط A , B , C , D هى رءوس مستطيل.

◂ مساحة المستطيل = الطول × العرض

= 20 وحدة مربعة

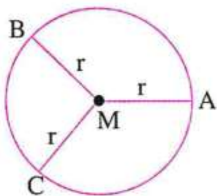
(لأن: $2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 20$ ◂)



سؤال 4

باستخدام قانون البعد بين نقطتين أثبت أن النقط:

A (–2 , 4) , B (5 , –3) , C (7 , 1) , D (0 , 8) هى رءوس متوازى أضلاع ABCD.



نقاط هامة

- إذا كانت النقط A , B تقع على الدائرة التى مركزها M

فإن: $AM = BM = CM = r$

مثال 11

اثبت أن النقط $A(3, -1)$, $B(-4, 6)$, $C(2, -2)$ تقع على دائرة مركزها النقطة $M(-1, 2)$

ثم أوجد محيط هذة الدائرة بدلالة π

الحل

$\because AM = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\because BM = \sqrt{(-4+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\because CM = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore AM = BM = CM = r = 5$

تذكر أن

- محيط الدائرة $= 2\pi r$
- مساحة سطح الدائرة $= \pi r^2$

حيث π النسبة التقريبية،

r طول نصف القطر

∴ النقط A , B , C تقع على دائرة مركزها M وطول نصف قطرها يساوى 5 وحدات طول

∴ محيط الدائرة $= 10\pi$ وحدات طول (لأن: $2\pi r = 2\pi(5) = 10\pi$)

مثال 12

إذا كانت النقطتان $A(-4, 6)$, $B(k, -1)$ تقعان على الدائرة التى مركزها $M(-1, 2)$،

أوجد قيم k الممكنة واحسب مساحة سطح الدائرة M بدلالة π:

الحل

$AM = \sqrt{(-1+4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

∴ طول نصف قطر الدائرة M يساوى 5 وحدات طول.

$\because AM = BM = r$ $\qquad \therefore BM = 5$

$BM = \sqrt{(k+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(k+1)^2 + 9}$

$\therefore \sqrt{(k+1)^2 + 9} = 5$ بتربيع الطرفين

$\therefore (k+1)^2 + 9 = 25$ $\qquad \therefore (k+1)^2 = 25 - 9$

$\therefore (k+1)^2 = 16$ $\qquad \therefore k + 1 = \pm 4$

$\therefore k + 1 = 4$ أو $\therefore k + 1 = -4$

$\therefore k = 4 - 1$ $\qquad \therefore k = -4 - 1$

$\therefore k = 3$ $\qquad \therefore k = -5$



∴ قيم k الممكنة هى -5 , 3

$\because A = \pi r^2$

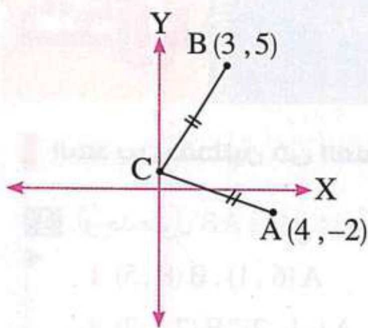
$= \pi \times (5)^2 = 25\pi$

أى أن: مساحة سطح الدائرة تساوى 25π وحدة مربعة.

س؟ سؤال 5

1. إذا كانت $A(5, k)$, $B(6, -6)$ تقعان على دائرة واحدة مركزها $M(2, -3)$،
   أوجد قيم k الممكنة، ثم احسب محيط الدائرة M بدلالة π
2. إذا كانت النقطة $A(5, 2)$ تقع على دائرة مركزها $M(1, -1)$، **احسب مساحة الدائرة M بدلالة π**

مثـال 13 في الشكل المقابل:



إذا كان: AC = BC

أوجد إحداثي النقطة C

الحـل

نفرض أن (0 , y) C حيث C تقع على محور Y

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AC = \sqrt{(0-4)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{16 + (y+2)^2}$

$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{9 + (y-5)^2}$

$\because AC = BC$

بتربيع الطرفين

$\therefore \sqrt{16 + (y+2)^2} = \sqrt{9 + (y-5)^2}$

$\therefore 16 + (y+2)^2 = 9 + (y-5)^2$

$\therefore 16 + y^2 + 4y + 4 = 9 + y^2 - 10y + 25$

$\therefore 20 + 4y = 34 - 10y$

$\therefore 4y + 10y = 34 - 20$

$\therefore 14y = 14$

$\therefore y = 1$

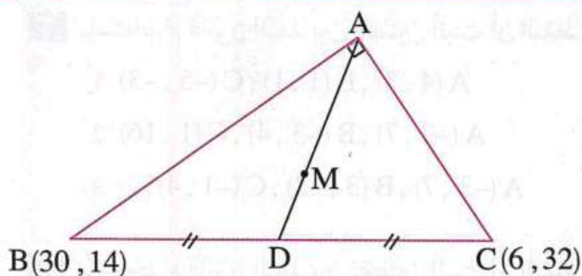
∴ إحداثي النقطة C هو (1 , 0)

تذكـر أن

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$



مثـال 14 في الشكل المقابل:



إذا كانت M نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC،

فما طول $\overline{DM}$؟

الحـل

$\because d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$\therefore BC = \sqrt{(30-6)^2 + (14-32)^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30$

∵ $\overline{AD}$ متوسط في المثلث ABC القائم في ∠BAC

$\therefore AD = \frac{1}{2} BC \qquad \therefore AD = \frac{1}{2} \times 30 = 15$

∵ M نقطة تقاطع متوسطات Δ ABC

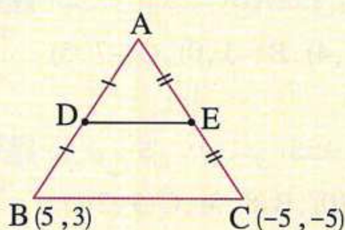
$\therefore MD = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} \times 15 = 5$

∴ طول $\overline{DM}$ = 5 وحدات طول

تذكـر أن

- طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول الوتر.
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تُقسم كلًا منها بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس.

س؟ سؤال 6



في الشكل المقابل:

E , D منتصفات $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب،

احسب طول $\overline{ED}$

أسئلة الكتاب المدرسى

البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى

1 أوجد طول $\overline{AB}$ فى كل مما يأتى:

1 A (6 , 1) , B (8 , 5)
2 A (1 , 4) , B (2 , –3)
3 A (–1 , 2) , B (2 , –2)
4 A (–2 , 5) , B (3 , 0)
5 A (2 , 1) , B (–2 , 3)
6 A (8 , –4) , B (–7 , 4)
7 A (15 , 0) , B (6 , 0)
8 A (6 , 0) , B (0 , –8)

2 إذا كانت: A (1 , 2) , B (4 , 6) , C (0 , 3) ، فأثبت أن: AB = BC

3 إذا كانت: A (k , 3) , B (3 , 2) , C (5 , 1) ، وكانت: AB = BC فأوجد قيم **k** الممكنة.

4 إذا كانت المسافة بين النقطتين: A (k , 5) , B (6 , 1) تساوى $2\sqrt{5}$ وحدة طول فأوجد قيم **k** الممكنة.

5 إذا كان: طول $\overline{AB}$ = 13 وحدة طول، وكانت A (k , 7) , B (3k – 1 , –5) فأوجد قيم **k** الممكنة.

6 أوجد محيط Δ ABC الذى رءوسه A (6 , 0) , B (2 , 0) , C (4 , $2\sqrt{3}$)

7 بإستخدام قانون البُعد بين نقطتين أثبت أن النقط الآتية تقع على استقامة واحدة:

1 A (4 , 3) , B (1 , 1) , C (–5 , –3)
2 A (–2 , 7) , B (–3 , 4) , C (1 , 16)
3 A (–3 , 7) , B (3 , –2) , C (–1 , 4)

8 باستخدام قانون البُعد بين نقطتين أثبت أن النقط: A (1 , 1) , B (5 , 1) , C (3 , 4) هى رءوس مثلث.

9 باستخدام قانون البُعد بين نقطتين هل النقط: A (7 , 0) , B (–3 , –3) , C (22 , 9) تقع على استقامة واحدة؟ ولماذا؟

10 إذا كانت النقطة A (5 , 2) تقع على دائرة مركزها M (1 , –1) فأوجد:

1 محيط الدائرة بدلالة π
2 مساحة الدائرة بدلالة π

11 إذا كانت النقطتان X (5 , k) , Y (–4 , 6) تقعان على دائرة واحدة مركزها M (1 , 2)، فأوجد قيم k الممكنة، واحسب مساحة الدائرة M بدلالة π.

12 أثبت أن المثلث ABC الذى رءوسه:

A (2 , 4) , B (–3 , 0) , C (–7 , 5) قائم الزاوية، ثم احسب مساحته.

13 بيِّن نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى قياسات زواياه:

1 A (3 , 10) , B (8 , 5) , C (5 , 2)
2 A (1 , –1) , B (2 , 1) , C (–3 , –2)
3 A (3 , 3) , B (4 , –1) , C (1 , 1)
4 A (7 , –4) , B (–1 , 2) , C (5 , –6)

14 أثبت أن النقط الآتية هى رءوس متوازى أضلاع ABCD باستخدام قانون البُعد بين نقطتين:

1 A (–2 , 5) , B (3 , 3) , C (–4 , 2) , D (–9 , 4)

2 A (2 , 3) , B (1 , –1) , C (–4 , –3) , D (–3 , 1)

---

15 باستخدام قانون البُعد بين نقطتين أثبت أن النقط:

1 A (1 , 1) , B (1 , 4) , C (5 , 4) , D (5 , 1) رءوس مستطيل ABCD ، ثم احسب مساحته.

---

16 اختر الإجابة الصحيحة:

1 البُعد بين النقطتين (2 , 2) ، (6 , –1) يساوى .... وحدة طول.

(أ) 2 (ب) 5 (جـ) 10 (د) 25

2 طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (0 , 0) ، (12 , 5) يساوى .... وحدة طول.

(أ) 5 (ب) 7 (جـ) 12 (د) 13

3 ما بُعد النقطة A (–3 , 4) عن نقطة الأصل؟ ....

(أ) 3 وحدات طول (ب) 4 وحدات طول (جـ) 5 وحدات طول (د) 7 وحدات طول

4 إذا كانت A (0 , 4) ، B (–3 , 0) فما طول $\overline{AB}$ ؟ ....

(أ) 1 وحدة طول (ب) 3 وحدات طول (جـ) 5 وحدات طول (د) 7 وحدات طول

5 البُعد بين النقطتين A (3 , k) ، B (–1 , k) يساوى .... وحدة طول.

(أ) 16 (ب) 9 (جـ) 5 (د) 4

6 إذا كان البعد بين النقطتين A (x , 0) ، B (3 , 2) تساوى $2\sqrt{5}$ وحدة طول ، فما مجموعة قيم x الممكنة؟

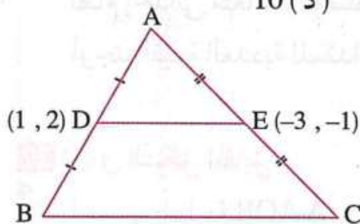
(أ) $\{-1 , 7\}$ (ب) $\{7\}$ (جـ) $\{-4 , 4\}$ (د) $\{-4 , 7\}$

7 ما مساحة الدائرة التى مركزها النقطة A (–3 , 5) ، وتمر بالنقطة B (9 , –4)؟

(أ) 15 π وحدة مربعة (ب) 225 π وحدة مربعة (جـ) 13 π وحدة مربعة (د) 144 π وحدة مربعة

8 إذا كان: ABCD مستطيل فيه A (–1 , –4) ، C (5 , 4)، فإن طول $\overline{BD}$ = ... وحدات طول.

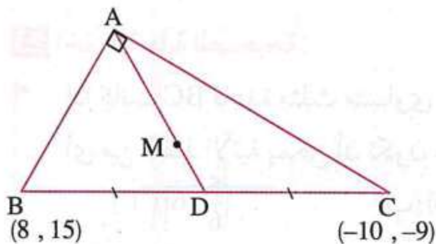
(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 8 (د) 10



9 فى الشكل المقابل: ما طول $\overline{BC}$ ؟

(أ) 12 وحدة طول (ب) 10 وحدات طول

(جـ) 8 وحدات طول (د) 5 وحدات طول



10 فى الشكل المقابل:

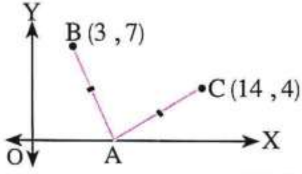
إذا كانت M نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC، فما طول $\overline{DM}$ ؟

(أ) 5 وحدات طول (ب) 6 وحدات طول

(جـ) 7 وحدات طول (د) 8 وحدات طول

17 في الشكل المقابل:

أوجد إحداثى النقطة A



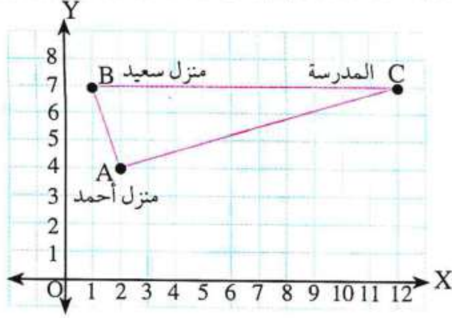
18 في الشكل المقابل، أوجد:

1 إحداثيات النقط التى تمثل مواقع منزل أحمد ومنزل سعيد والمدرسة.

2 بُعد منزل أحمد عن المدرسة لأقرب جزء من عشرة.

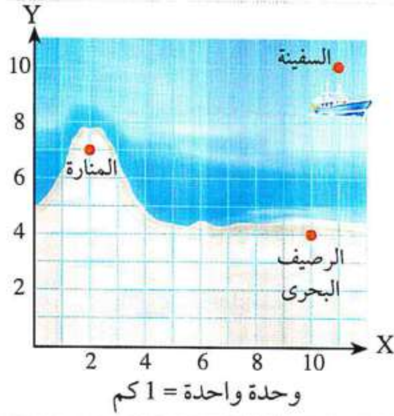
3 بُعد منزل سعيد عن المدرسة.

4 أيهما أقرب من المدرسة: منزل أحمد أم منزل سعيد؟



19 تلقى المنارة الضوء فى مسار دائرى ليصل الضوء فى أقصى مداه إلى الرصيف البحرى،

فهل يصل الضوء إلى السفينة فى الموقع الموضح؟



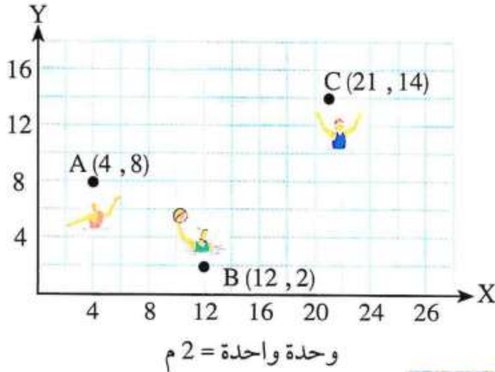
وحدة واحدة = 1 كم

20 يوضح الرسم البيانى مواقع ثلاثة لاعبين خلال جزء من مباراة كرة ماء.

يرمى اللاعب A الكرة إلى اللاعب B الذى يرميها بدوره إلى اللاعب C،

ثم يعيدها اللاعب C إلى اللاعب A.

أوجد المسافات بالمتر التى قطعتها الكرة بفرض أنها تتحرك فى خط مستقيم.



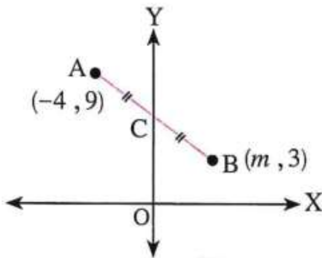
وحدة واحدة = 2 م



21 في الشكل المقابل:

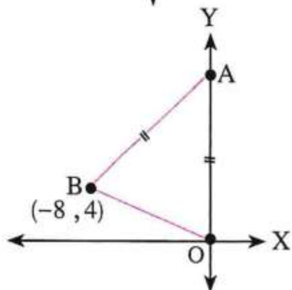
نظام إحداثى متعامد، C منتصف $\overline{AB}$

أوجد القيمة العددية للمقدار: AB + OC



22 في الشكل المقابل:

احسب مساحة Δ AOB



23 اختر الإجابة الصحيحة:

إذا كانت $\overline{BC}$ قاعدة مثلث متساوى الساقين حيث B (1 , 3) ، C (−2 , 7)

أى من النقط الآتية يمكن أن تكون هى الرأس A؟

(أ) $\left(\frac{5}{6}, 6\right)$ (ب) (1 , 6) (جـ) $\left(\frac{-1}{2}, 5\right)$ (د) $\left(2, 0\right)$

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 البُعد بين النقطتين (0 , 2) ، (0 , 5) هو .... وحدة طول.

(أ) 7 (ب) $\sqrt{29}$ (جـ) $3\frac{1}{2}$ (د) 3

2 بُعد النقطة ($4 , 2\sqrt{2}$) عند نقطة الأصل يساوي .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $2\sqrt{2}$ (جـ) $3\sqrt{2}$ (د) $4\sqrt{2}$

3 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 320 π سم^3 وارتفاعها 20 سم، فإن طول قطر قاعدتها = ... سم.

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 8 (د) 16

4 طول نصف قطر الدائرة التي محيطها 13 π سم يساوي .... سم.

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) 6.5 (جـ) 13 (د) 26

5 إذا كانت $f(x) = 4$، فإن قيمة $\frac{3f(5)}{4f(5)}$ تساوي ....

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{5}{8}$ (د) $\frac{8}{5}$

2 أكمل ما يأتي:

1 البُعد بين النقطة (4 , 3–) ونقطة الأصل يساوي .... وحدات طول.

2 طول نصف قطر الدائرة التي مركزها M (7 , 4) وتمر بالنقطة A (3 , 1) يساوي .... وحدات طول

3 الوسط المتناسب بين العددين 48 , 3 يساوي ....

3 أجب عما يأتي:

1 إذا كانت البُعد بين النقطتين A (k , 7) ، B (–2 , 3) يساوي 5 أوجد قيم k الممكنة.

2 اثبت أن المثلث الذي رءوسه النقط:

A (5 , –5) ، B (–1 , 7) ، C (15 , 15)

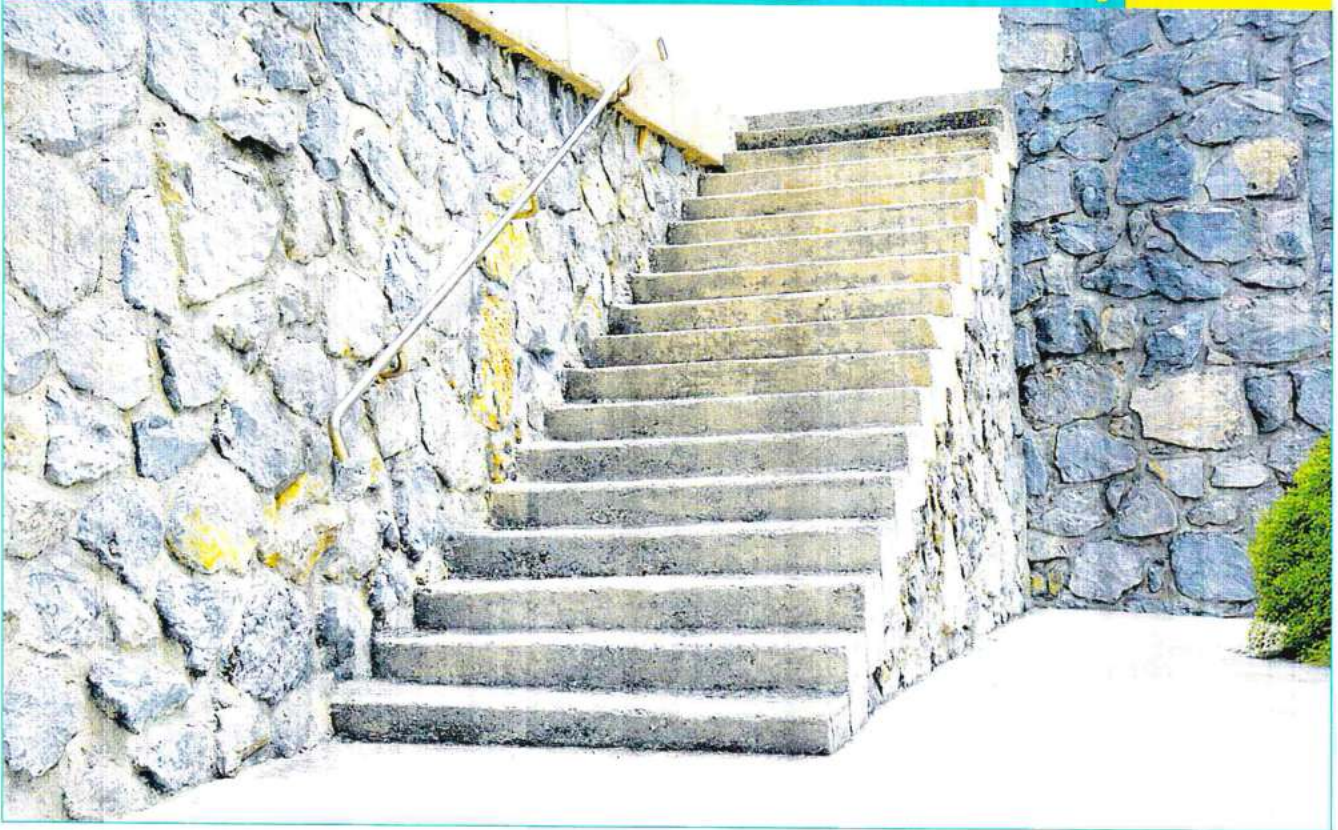
قائم الزاوية، ثم أوجد مساحته.

3 إذا كانت: a , b , c , d كميات متناسبة فأثبت كلًا مما يأتي:

(أ) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ب) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

ذاكر الدرس 7

ميل الخط المستقيم
(Slope of a Straight Line)





نواتج التعلم

- يعرف الطالب مفهوم ميل الخط المستقيم.
- يوجد الطالب ميل الخط المستقيم فى النظام الإحداثى.
- يستخدم الطالب ميل الخط المستقيم فى حل بعض التطبيقات الحياتية.

مفردات أساسية

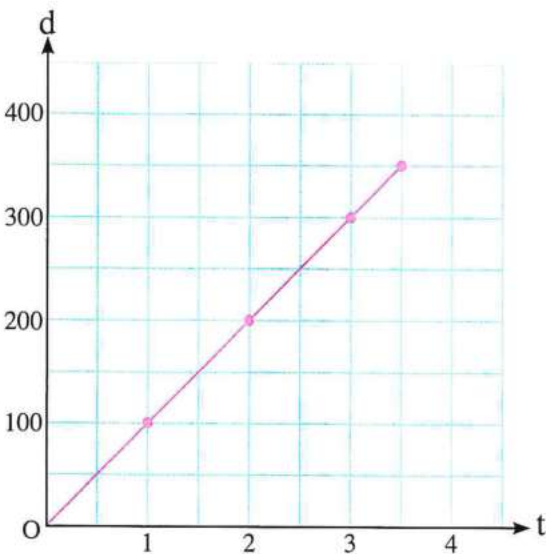
- ميـل (Slope)
- التغير فى y (The change of y)
- التغير فى x (The change of x)
- سرعـة (Velocity)



فكر وناقش

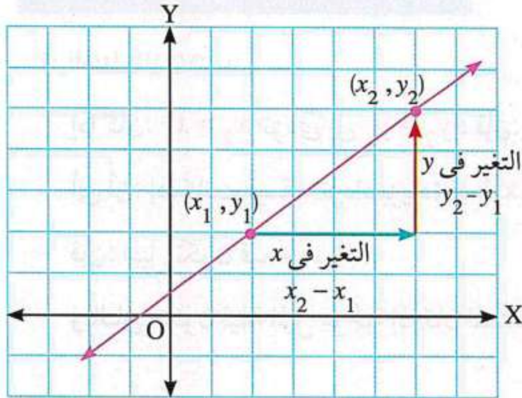
- يمثل الشكل البيانى المقابل العلاقـة بين المسافة (d) بالكيلومتر والزمن (t) بالساعـة لرحلة سامح بسيارتـه على أحد الطرق السريعة التى تسمح بسرعة 120 كم/ ساعة بحد أقصى.

فهل تجاوز سامح السرعة المقررة أثناء رحلته؟



- **فى هذا الدرس، سـوف تتعرف على ميل الخط المستقيم وتطبيقاتـه؛ لحل مثل هذه المشكلات الحياتية.**

تعلم 1 ميل الخط المستقيم:



ميل الخط المستقيم:

هو مقياس لشدة انحدار الخط المستقيم،

وهو النسبة بين التغير الرأسى (التغير فى y) والتغير الأفقى (التغير فى x)

بين أى نقطتين واقعتين عليه فى المستوى الإحداثى، ويرمز له عادة بالحرف (m)

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين:

(x_1, y_1) ، (x_2, y_2) فى النظام الإحداثى يعطى بالعلاقة:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{أو} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1 أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$ فى كل مما يأتى:

1. A (1 ,4) , B (3 ,6)
2. A (2 ,−3) , B (−4 ,1)
3. A (5 ,0) , B (3 ,−1)
4. A (0 ,4) , B (2 ,−4)
5. A (1 ,2) , B (7 ,2)
6. A (−5 ,3) , B (−5 ,4)

الحل

1

A (1 , 4) , B (3 , 6) ($x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 6$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-4}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = 1

2

A (2 , −3) , B (−4 , 1) ($x_1 = 2$, $y_1 = -3$, $x_2 = -4$, $y_2 = 1$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = $-\frac{2}{3}$

3

A (5 , 0) , B (3 , −1) ($x_1 = 5$, $y_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_2 = -1$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{3-5} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = $\frac{1}{2}$

4

A (0 , 4) , B (2 , −4) ($x_1 = 0$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$, $y_2 = -4$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = −4

5

A (1 , 2) , B (7 , 2) ($x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 7$, $y_2 = 2$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{7-1} = \frac{0}{6} = 0$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = صفر

6

A (−5 , 3) , B (−5 , 4) ($x_1 = -5$, $y_1 = 3$, $x_2 = -5$, $y_2 = 4$)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{-5-(-5)} = \frac{1}{0}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف

لاحظ أن

الكسر الذى مقامه 0 يكون غير معرف.

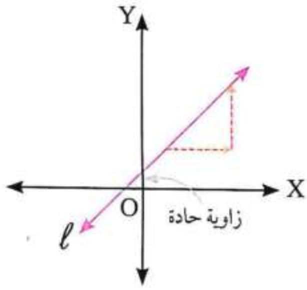
سؤال 1

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$ فى كل مما يأتى:

1. A (5 , 4) , B (2 , 6)
2. A (−2 , 1) , B (−2 , 5)

حـالات ميل الخط المستقيم:

1 الميل الموجب:



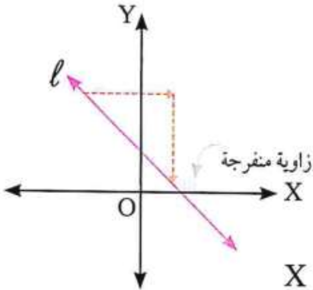
إذا كان: $x_2 > x_1$ تؤدى إلى $y_2 > y_1$ ، **فإن:** $m > 0$

أى أن: إذا كانت قيمة y تزداد بزيادة قيمة x لكل نقطة تتحرك على المستقيم،

فإن: الميل تكون قيمته موجبة.

وبالتالى: تكون قيمة الميل موجبة إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور X

2 الميل السالب:



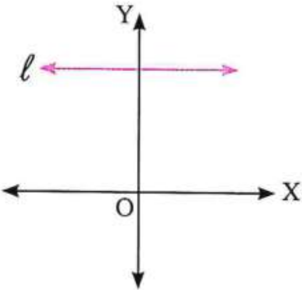
إذا كان: $x_2 > x_1$ تؤدى إلى $y_2 < y_1$ ، **فإن:** $m < 0$

أى أن: إذا كانت قيمة y تتناقص بزيادة قيمة x لكل نقطة تتحرك على المستقيم،

فإن: الميل تكون قيمته سالبة.

وبالتالى: تكون قيمة الميل سالبة إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور X

3 الميل يساوى الصفر:



إذا كان: $x_2 > x_1$ تؤدى إلى $y_2 = y_1$ (أى أنه لا يوجد تغير رأسى) **فإن:** $y_2 - y_1 = 0$

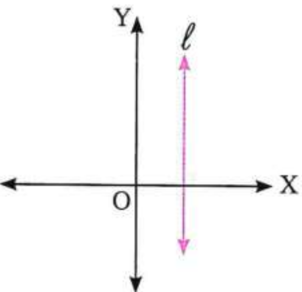
أى أن: إذا كانت قيمة y ثابتة لكل نقطة على المستقيم،

فإن: قيمة الميل تساوى صفر.

وبالتالى فإن: ميل المستقيم الموازى لمحور X (المستقيم الأفقى) يساوى الصفر

ومنها ميل المستقيم الموزاى لمحور X يصنع زاوية صفرية مع الاتجاه الموجب لمحور X

4 الميل غير معرف:



إذا كانت: $y_2 > y_1$ يؤدى إلى $x_2 = x_1$ (أى أنه لا يوجد تغير أفقى) **فإن:** $x_2 - x_1 = 0$

أى أن: قيمة x ثابتة لكل نقطة على المستقيم،

فإن: قيمة الميل تكون غير معرفة.

وبالتالى فإن: ميل المستقيم الموازى لمحور Y (المستقيم الرأسى) غير معرف

ومنها ميل المستقيم الموزاى لمحور Y يصنع زاوية قائمة مع الاتجاه الموجب لمحور X

نقاط هامة

- إذا كان المستقيم يوازى محور X ، فإن: $m = 0$ وبالتالى فإن: $y_2 - y_1 = 0$
- إذا كان المستقيم يوازى محور Y ، فإن: m غير معرف وبالتالى فإن: $x_2 - x_1 = 0$

مثـال 2 أوجد قيمة k في كل مما يأتي:

1 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (2 , k) , (4 , 4−) يساوى $\frac{3}{2}$

2 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (7 , k−) , (1 , k + 1) يساوى 2−

3 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (3 , 3) , (4 , k) يوازى محور X

4 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (k , 7) , (2 , 3−) يوازى محور Y

الحــل

1

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{k-4}{2+4}$

$\therefore \frac{3}{2} = \frac{k-4}{6}$

$\therefore 2k - 8 = 18$

$\therefore 2k = 18 + 8$ $\qquad \therefore 2k = 26$

$\therefore \frac{2k}{2} = \frac{26}{2}$ $\qquad \therefore k = 13$

2

$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore -2 = \frac{7-1}{-k-(k+1)}$

$\therefore -2 = \frac{6}{-k-k-1}$

$\therefore \frac{-2}{1} = \frac{6}{-2k-1}$

$\therefore 4k + 2 = 6$ $\qquad \therefore 4k = 6 - 2$

$\therefore 4k = 4$ $\qquad \therefore \frac{4k}{4} = \frac{4}{4}$

$\therefore k = 1$

3 ∵ المستقيم // محور X

$\therefore m = 0$

$\therefore y_2 - y_1 = 0$

$\therefore 3 - k = 0$

$\therefore k = 3$

4 ∵ المستقيم // محور Y

∴ m غير معرف

$\therefore x_2 - x_1 = 0$

$\therefore k - (-3) = 0$

$\therefore k + 3 = 0$

$\therefore k = -3$

تنوع الإستراتيجيات

∵ المستقيم // محور X

$\therefore y_2 = y_1$

$\therefore k = 3$

تنوع الإستراتيجيات

∵ المستقيم // محور Y

$\therefore x_2 = x_1$

$\therefore k = -3$

سؤال 2

1 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (7 , 4) , (6 , a) يساوى 5 ، فأوجد قيمة a

2 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (8− , 7) , (a , 4) يوازى محور Y، فأوجد قيمة a



نقاط هامة

• بفرض أن: A , B , C ثلاث نقاط، وكان ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$ ، B نقطة مشتركة.

(1) إذا كان: $m_1 = m_2$ فإن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

(2) إذا كان: $m_1 \neq m_2$ فإن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.

• إذا كان: A , B , C ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، فإن: ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = ميل $\overleftrightarrow{BC}$ = ميل $\overleftrightarrow{AC}$

مثال 3 أثبت أن النقط $A\ (0 , 1)$, $B\ (2 , 3)$, $C\ (5 , 6)$ تقع على استقامة واحدة ثم تحقق من صحة الحل بيانيًا:

الحل

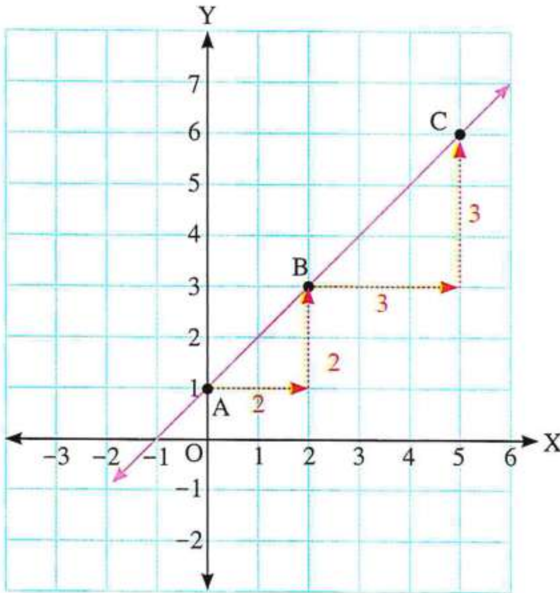
بفرض أن ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore m_2 = \frac{6-3}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$

حيث إن: $m_1 = m_2$ ، B نقطة مشتركة بين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة.



التحقق من صحة الحل:

عند التمثيل البيانى للنقط A , B , C نجد أن:

نسبة التغير الرأسى (التغير فى y) إلى التغير الأفقى (التغير فى x)

ثابتة بين كل نقطتين، أى أن الميل ثابت، لذلك النقط تقع

على نفس الخط المستقيم.

مثال 4 أوجد قيمة k التى تجعل النقاط $A\ (-2 , -5)$, $B\ (1 , 1)$, $C\ (4 , k)$ تقع على استقامة واحدة.

الحل

بفرض أن: ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+5}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore m_2 = \frac{k-1}{4-1} = \frac{k-1}{3}$

∵ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

$\therefore m_1 = m_2$

$\therefore \frac{k-1}{3} = 2$ $\qquad$ $\therefore k - 1 = 6$

$\therefore k = 6 + 1$ $\qquad$ $\therefore k = 7$

تنوع الاستراتيجيات

∵ A , B , C تقع على استقامة واحدة

$\therefore m_1 = m_2$

$\therefore \frac{1+5}{1+2} = \frac{k-1}{4-1}$

$\therefore \frac{6}{3} = \frac{k-1}{3}$

$\therefore k - 1 = 6$ $\qquad$ $\therefore k = 7$

مثـال 5 وضح هل النقاط A (2 , 2) , B (3 , 4) , C (4 , 7) تقع على استقامة واحدة أم لا؟

الحـل

بفرض أن: ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

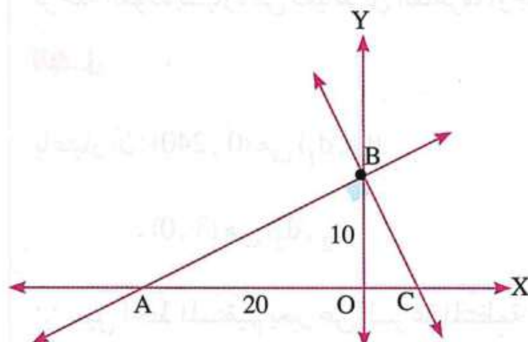
$$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore m_2 = \frac{7-4}{4-3} = \frac{3}{1} = 3$$

$\because m_1 \neq m_2$

∴ النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.

مثـال 6 فى الشكل المقابل:



إذا كان طول $\overline{OB} = 10$ وحدات طول، طول $\overline{OA} = 20$ وحدة طول،

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC}$

الحـل

∵ طول $\overline{OA} = 20$ وحدة طول، A تقع على محور X فى الاتجاه السالب ∴ إحداثى A هو (0 , 20–)

∵ طول $\overline{OB} = 10$ وحدات طول، B تقع على محور Y فى الاتجاه الموجب ∴ إحداثى B هو (10 , 0)

فى ΔABC

$\because m(\angle ABC) = 90°$, $\overline{BO} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BO)^2 = OA \times OC$ (نظرية إقليدس) $\therefore (10)^2 = 20 \times OC$

$\therefore 100 = 20 \times OC$

$$\therefore OC = \frac{100}{20} = 5$$

∵ C تقع على محور X فى الاتجاه الموجب ∴ إحداثى C هو (0 , 5)

بفرض أن ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ حيث A (–20 , 0) ، B (0 , 10)

$$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-0}{0+20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$

بفرض أن ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$ حيث B (0 , 10) ، C (5 , 0)

$$\therefore m_2 = \frac{0-10}{5-0} = \frac{-10}{5} = -2$$

∴ ميل $\overleftrightarrow{BC} = -2$

سؤال 3

فى كل مما يأتى وضح هل الثلاث نقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة أم لا؟

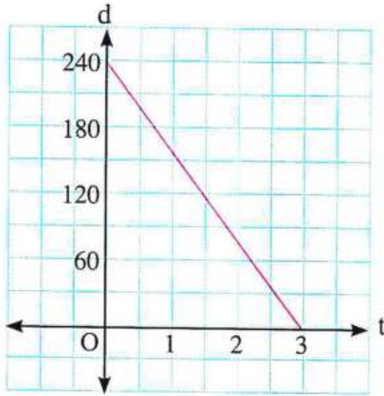
1. A (1 , 3) , B (–3 , 2) , C (–7 , 1)
2. A (2 , 1) , B (3 , 0) , C (5 , –1)

تعلم 2 تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم:

ميل الخط المستقيم هو نسبة بين التغير الرأسى والتغير الأفقى لأى نقطتين عليه وهى نسبة ثابتة تعبر عن معدل تغير y بالنسبة إلى x لذلك يستخدم ميل الخط فى العديد من التطبيقات التى نحتاج فيها إلى حساب المعدل مثل انحدار الطرق والسرعة ومعدلات النمو واستهلاك الوقود.

مثال 7

الشكل المقابل يعبر عن العلاقة بين المسافة (d) بالكيلومتر والزمن (t) بالساعة لرحلة العودة لسيارة من دمياط إلى القاهرة، أوجد مقدار السرعة المنتظمة للسيارة.



الحـل

باعتبار أن: $(0, 240)$ هى (t_1, d_1)

، $(3, 0)$ هى (t_2, d_2)

$\because$ ميل الخط المستقيم يعبر عن السرعة المنتظمة (V) للسيارة.

$$\therefore V = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 240}{3 - 0} = \frac{-240}{3} = -80$$

$\therefore$ مقدار سرعة السيارة = 80 كيلومتر/ ساعة

لاحظ أن: أن الإشارة السالب تدل على أن الرحلة فى اتجاه العودة.

نقاط هامة

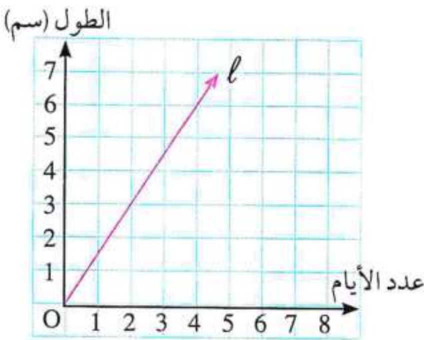
- السرعة المنتظمة: هى قطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية وتساوى التغير فى المسافة (d) مقسومًا على التغير فى الزمن (t).

أى أن: $V = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

مثال 8

الشكل المقابل يوضح العلاقة بين:

عدد الأيام (محور X) وطول نبات ما بالسنتيمتر (محور Y)



1 أوجد معدل النمو لهذا النبات.

2 بافتراض أن معدل نمو النبات يستمر بنفس الوتيرة، فكم سيكون طوله بعد 10 أيام؟

الحـل

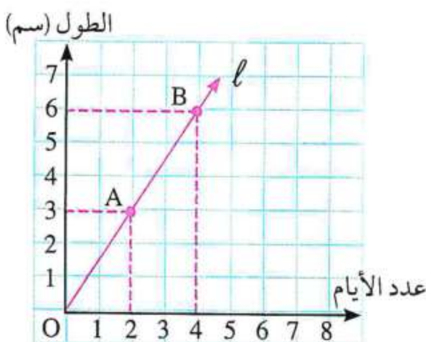
1 معدل نمو النبات = معدل التغير فى الطول بالنسبة لعدد الأيام

أى أن: معدل نمو النبات = ميل الخط المستقيم ℓ

بتحديد نقطتين على المستقيم مثل: $A(2, 3), B(4, 6)$

$$\therefore m = \frac{6 - 3}{4 - 2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ معدل نمو النبات = $\frac{3}{2}$ سم/ يوم

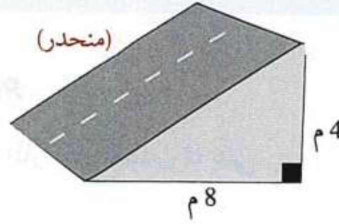


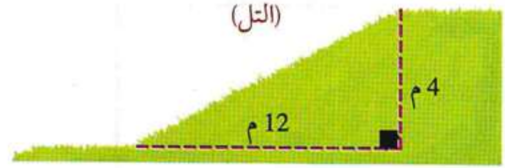
2 طول النبات بعد 10 أيام = 15 سم

(لأن: $10 \times \frac{3}{2} = 15$)

مثـال 9 فى الشكلين التاليين:

أيهما أكثر صعوبة فى الصعود: التل أم المنحدر؟





الحـل

باعتبار أن: m_1 هو ميل التل، m_2 هو ميل المنحدر

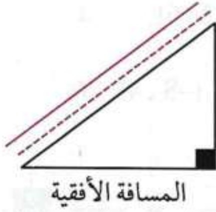
$\therefore m_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad , \quad m_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\because m_2 > m_1$

∴ المنحدر أكثر صعوبة فى الصعود من التل.

نقاط هامة

- يستخدم ميل الخط المستقيم كمقياس لشدة انحدار الطرق.
- ميل الطريق = $\frac{\text{الارتفاع}}{\text{المسافة الأفقية}}$



مثـال 10

طريق يرتفع بمعدل 2 متر لكل 25 مترًا أفقيًا، فما هو ارتفاع نهاية الطريق إذا كان طوله 300 م؟

الحـل

ميل الطريق = $\frac{\text{الارتفاع}}{\text{المسافة الأفقية}} = \frac{2}{25}$ ، وبفرض أن x هو ارتفاع نهاية الطريق.

$\therefore \frac{2}{25} = \frac{x}{300}$

$\therefore x = \frac{2 \times 300}{25}$

$\therefore x = 24$

∴ ارتفاع نهاية الطريق = 24 مترًا

مثـال 11

يعبر الجدول المقابل عن العلاقة بين كمية الوقود المستهلكة أثناء حركة سيارة والمسافة المقطوعة، احسب معدل استهلاك الوقود.

المسافة المقطوعة بالكيلومتر	80	160	240
كمية الوقود المستهلكة باللتر	8	16	24

الحـل

- معدل استهلاك الوقود = $\frac{\text{التغير فى كمية الوقود}}{\text{التغير فى المسافة المقطوعة}}$

أى أن: معدل استهلاك الوقود = ميل الخط المستقيم

$\therefore m = \frac{16 - 8}{160 - 80} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$

أى أن: السيارة تستهلك 1 لتر وقود لكل 10 كيلومتر أثناء حركتها.

سؤال 4

يتسلق أحمد مرتفعًا صخريًا يرتفع 10 أمتار لكل 8 أمتار أفقيًا، بينما يتسلق خالد مرتفعًا آخر يرتفع 18 مترًا لكل 9 أمتار أفقيًا، أى المرتفعين أكثر انحدارًا؟

ميل الخط المستقيم (Slope of a Straight Line)

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل ▲ تقييم ▲ ابتكار

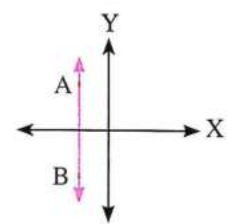
أسئلة الكتاب المدرسى

ميل الخط المستقيم

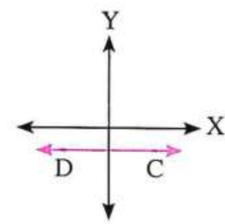
1 أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى:

1 (5 , 4) , (3 , 1)	2 (–1 , 3) , (3 , –1)	3 (–3 , 4) , (1 , –6)
4 (2 , 0) , (2 , 6)	5 (–5 , –3) , (6 , 3)	6 (–1 , –7) , (4 , –2)
7 (–8 , 3) , (–8 , 4)	8 (6 , 0) , (–6 , 0)	9 (–1 , –8) , (–7 , –4)

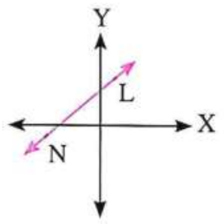
2 صنف ميل المستقيم فى كل من الأشكال الآتية بأنه (موجب، سالب، صفر، غير معرف):

1


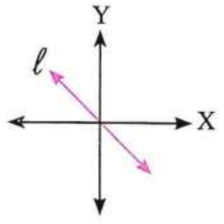
ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ....

2


ميل $\overleftrightarrow{DC}$ ....

3


ميل $\overleftrightarrow{LN}$ ....

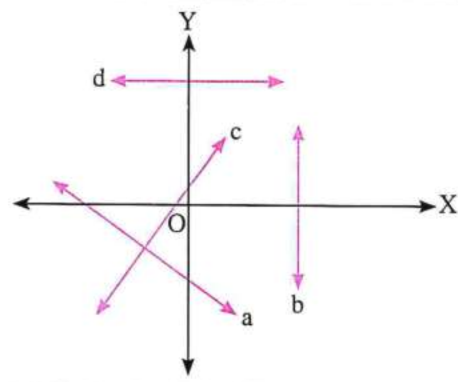
4


ميل المستقيم ℓ ....

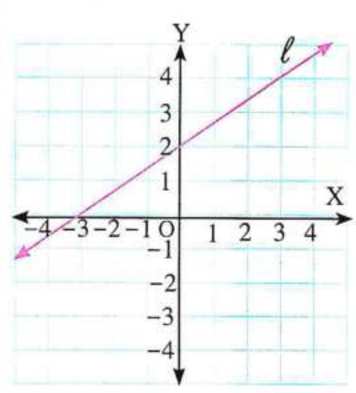
3 فى الشكل المقابل:

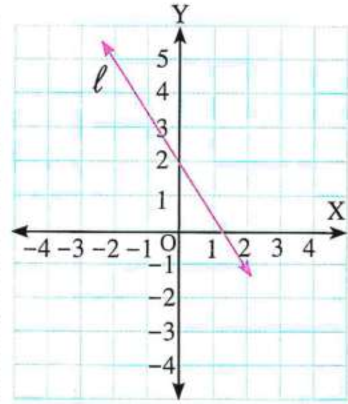
صنِّف ميل كل مستقيم من المستقيمات d , c , b , a

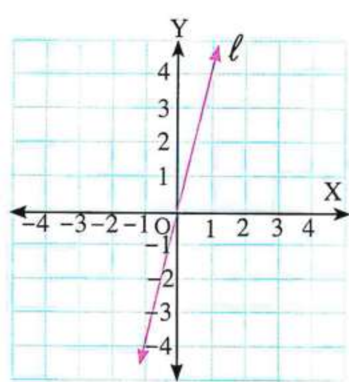
من حيث كونه (موجبًا - سالبًا - صفرًا - غير معرف)



4 أوجد ميل المستقيم ℓ فى كل مما يأتى:

1


2


3


5 **أكمل ما يأتى:**

1 ميل المستقيم الموازى لمحور X يساوى ....

2 ميل المستقيم الموازى لمحور Y يكون ....

3 المستقيم الذى ميله يساوى صفرًا يكون موازيًا لمحور ....

4 المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (3 ,2) يكون ميله ....

6 **أوجد قيمة k فى كل مما يأتى:**

1 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين A (5 , 2) , B (6 , k) يساوى 3

2 إذا كان $A(3, -2)$, $B(-2, k)$ ، $m = 0$

3 إذا كان $A(-2, 5)$, $B(3, k)$ ، $m = 2$

4 إذا كان $A(2, 3)$, $B(k, -6)$ ، $m = \frac{-3}{2}$

5 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين A (0 , 4) , B (-1 , k) موازيًا محور X

6 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين A (5 , 2) , B (k , -7) موازيًا محور Y

7 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين A (k + 2 , 3) , B (-k , -9) يساوى 2

7 **فى كل مما يأتى بيِّن هل النقاط الثلاث المعطاة على استقامة واحدة أم لا؟**

1 $A(2, 1)$, $B(-4, 4)$, $C(6, -1)$

2 $D(5, -5)$, $E(7, -11)$, $F(-7, -1)$

8 **فى كل مما يأتى اثبت أن النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة.**

1 $A(1, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(-7, 1)$

2 $A(1, 3)$, $B(2, 4)$, $C(3, 5)$

3 $A(0, 1)$, $B(3, 3)$, $C(9, 7)$

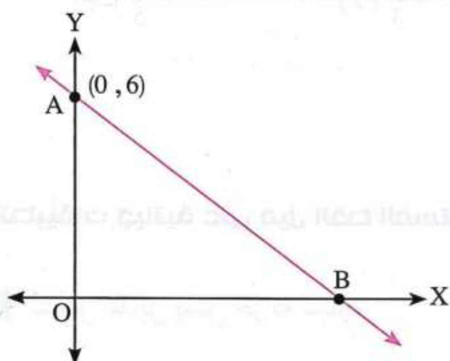
4 $A(2, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, 7)$

9 **أوجد قيمة k التى تجعل النقاط A (-1 , -3) , B (2 , 0) , C (4 , k) تقع على استقامة واحدة.**

10 **فى الشكل التالى:**

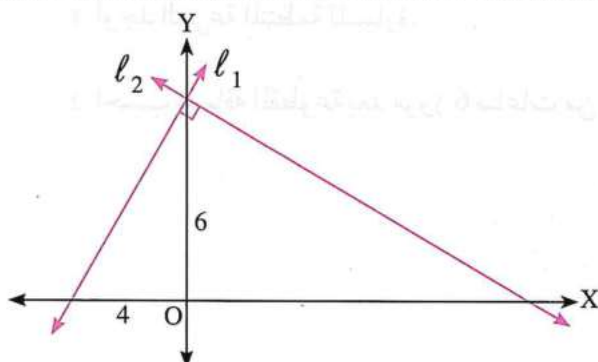
إذا كانت مساحة المثلث OAB = 24 وحدة مربعة

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$



11 **فى الشكل التالى:**

أوجد ميل كل من المستقيمين ℓ_1 , ℓ_2



12 اختر الإجابة الصحيحة:

1 ميل المستقيم المار بالنقطتين (1- , 3) , (1 , 3) هو ....

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) غير معرف

2 ما ميل المستقيم المار بالنقطتين (7 , 5) B , (3 , 2−) A؟ ....

(أ) $\frac{7}{4}$ (ب) $\frac{4}{7}$ (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

3 ما ميل المستقيم المار بالنقطتين (2 , 4) B , (2 , 3) A؟ ....

(أ) 2 (ب) 1 (جـ) 0 (د) غير معرف

4 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (k , 5) , (3 , 2) يوازى محور X فإن k تساوى ....

(أ) 3 (ب) 3− (جـ) 0 (د) $\frac{1}{3}$

5 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (3 , a) , (b , 2) يساوى $\frac{1}{2}$ فما قيمة a؟ ....

(أ) 4 − 2b (ب) 8 − 2b (جـ) 2b − 4 (د) 2b − 8

6 إذا كانت النقطة (2 , 2) تقع على المستقيم الذى ميله = 2 ، فأى من النقاط الآتية تقع على نفس المستقيم؟ ....

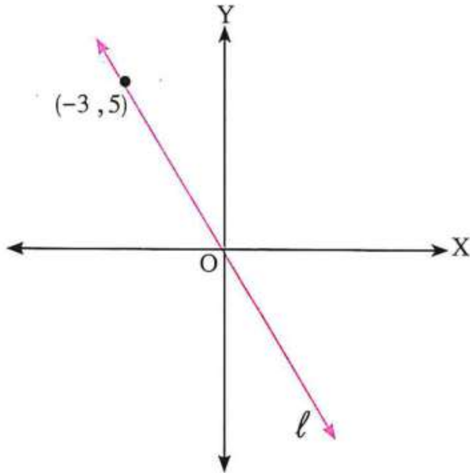
(أ) (1 , 4) (ب) (3 , 4) (جـ) (4 , 1) (د) (4 , 4)

7 فى الشكل المقابل:

ما ميل المستقيم ℓ؟ ....

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{3}{5}$

(جـ) $-\frac{3}{5}$ (د) $-\frac{5}{3}$

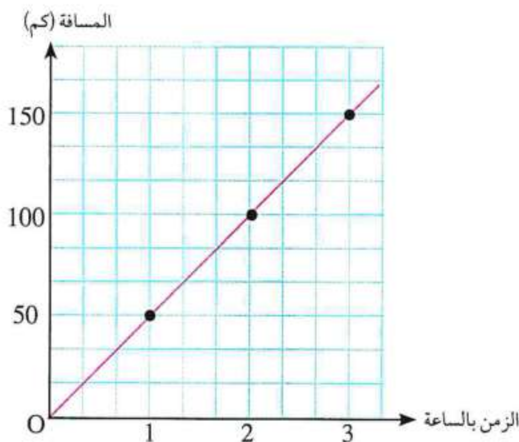


تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم:

13 الشكل المقابل يمثل حركة سيارة:

1 أوجد السرعة المنتظمة للسيارة.

2 احسب المسافة المقطوعة بعد مرور 6 ساعات من بدء الحركة.

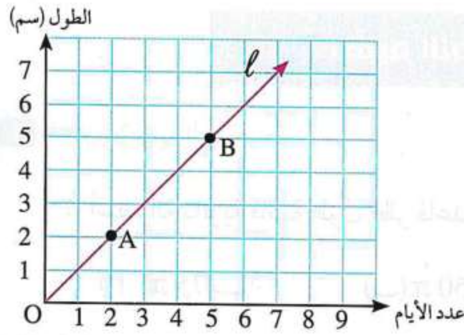


14 **الشكل المقابل:**

يوضح العلاقة بين عدد الأيام (المحور X)

وطول نبات ما بالسنتيمتر (المحور Y)

أوجد معدل النمو لهذا النبات.



15 يتسلق عمر مرتفعًا صخريًا يرتفع 12 مترًا لكل 6 أمتار أفقية، ويتسلق خالد مرتفعًا آخر يرتفع 25 مترًا لكل 12 مترًا أفقيًا،

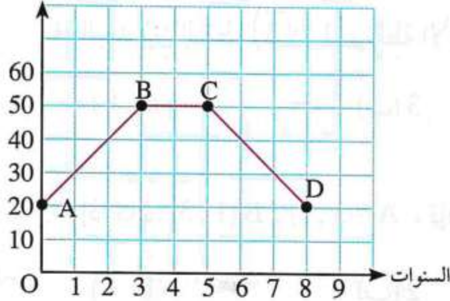
أى المرتفعين أكثر انحدارًا؟

16 **الشكل المقابل:**

يوضح تغير رأس مال شركة خلال 8 سنوات

1 **احسب** رأس مال الشركة عند بدء عملها.

2 **أوجد** ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$



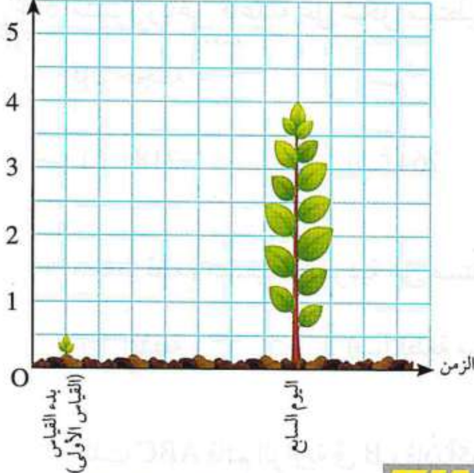
17 أجرى قياس أولى لطول إحدى النباتات المتسلقة فكان 0.5 متر،

وبعد سبعة أيام أصبح طول النبتة 4 أمتار.

1 **ارسم** خطا بيانيًا يمثل العلاقة بين طول النبتة والزمن.

2 **ما** ميل الخط فى الرسم؟ وماذا يمثل هذا الميل؟

3 بافتراض أن معدل نمو النبتة يستمر بنفس الوتيرة **فكم** سيكون طول النبتة بعد 15 يومًا؟



TIMSS تفكير إبداعى

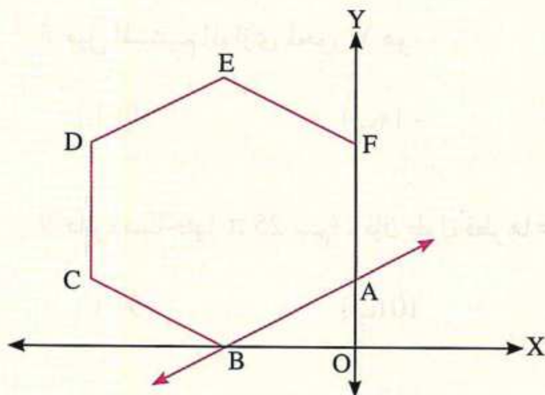
18 إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقط: $A(3, -1)$, $B(x, 1)$, $C(9, y)$

ميلـه $= \frac{2}{3}$، **فأوجد** قيمة كل من x, y

19 **فى الشكل المقابل:**

ABCDEF شكل سداسى منتظم

أوجد ميل $\overleftrightarrow{AB}$



1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 10 سم وارتفاعها 25 سم، ما حجمها؟ ....

(أ) 75π سم^3 (ب) 250π سم^3 (جـ) 400π سم^3 (د) 625π سم^3

2 دائرتان مساحتاهما 64π سم^2، 100π سم^2 ، فما النسبة بين محيطيهما؟ ....

(أ) $3:4$ (ب) $4:5$ (جـ) $9:16$ (د) $16:25$

3 البعد بين النقطة $(\sqrt{3}, 1)$ ونقطة الأصل هو .... وحدة طول.

(أ) 4 (ب) 3 (جـ) 2 (د) 1

4 إذا كان: $A(-3, 1)$, $B(1, 3)$ ، فإن ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوى ....

(أ) -1 (ب) 2 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) 1

5 منشور رباعى قاعدته على شكل مستطيل بعداه 8 سم ، 4 سم ومساحته الكلية 280 سم^2 ،

فإن حجمه = ... سم^3 .

(أ) 218 (ب) 264 (جـ) 288 (د) 320

6 مسقط قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم هو ....

(أ) نقطة (ب) قطعة مستقيمة (جـ) شعاع (د) خط مستقيم

7 مثلث ABC قائم الزاوية فى B ، فإن أكبر أضلاع المثلث طولًا هو ....

(أ) $\overline{AB}$ (ب) $\overline{BC}$ (جـ) $\overline{AC}$ (د) غير ذلك

8 ميل المستقيم الموازى لمحور Y هو ....

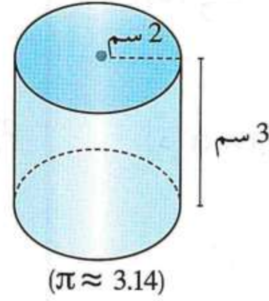
(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 0 (د) غير معرف

9 دائرة مساحتها 25π سم^2 ، فإن طول قطرها = ... سم.

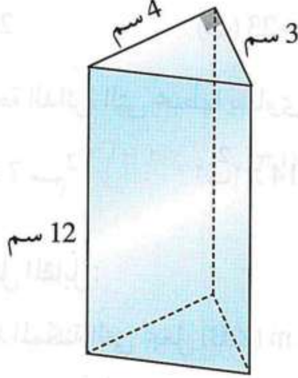
(أ) 5 (ب) 10 (جـ) 12.5 (د) 25

2 أجب عما يأتى:

1 أوجد حجم الأسطوانة الآتية:



2 أوجد المساحة السطحية للمنشور التالى:

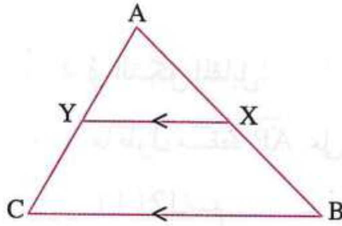


3 أثبت أن النقط $A(3, -2)$ ، $B(-5, 0)$ ، $C(0, -7)$ ، $D(8, -9)$ هى رءوس متوازى أضلاع.

4 فى الشكل المقابل: ABC مثلث فيه:

$\overline{BC} \parallel \overline{XY}$ ، $AC < AB$

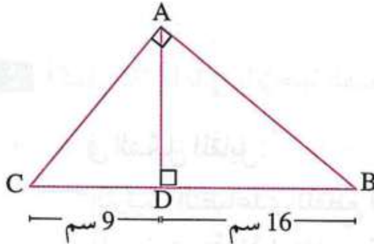
برهن أن: $m(\angle AYX) > m(\angle AXY)$



5 فى الشكل المقابل: ABC مثلث قائم الزاوية فى A ،

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، $BD = 16$ سم ، $DC = 9$ سم

أوجد طول كلٍّ من: $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$



6 إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(k, 3)$ ، $(-5, 2)$ يوازى محور Y ، فأوجد قيمة k

7 دائرة محيطها 28π سم، أوجد مساحتها بدلالة π

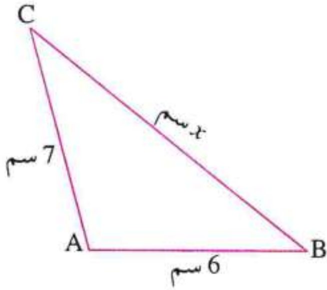
1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-7 , 6)$, $(-4 , k)$ يساوى $-\frac{1}{3}$ ، فما قيمة k ؟ ....

(أ) 23 (ب) -23 (جـ) $\frac{11}{3}$ (د) $-\frac{11}{3}$

2 ما مساحة الدائرة التى محيطها يساوى 14π سم ؟ ....

(أ) 7π سم^2 (ب) 14π سم^2 (جـ) 49π سم^2 (د) 196π سم^2

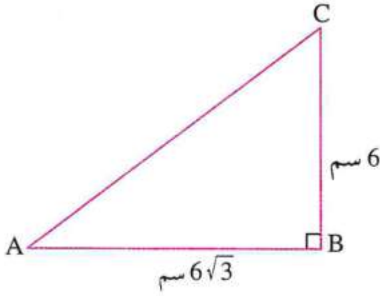


3 فى الشكل المقابل:

ما قيم x الممكنة التى تجعل $m(\angle B) < m(\angle A)$ ؟ ....

(أ) $6 < x < 7$ (ب) $1 < x < 13$

(جـ) $7 < x < 13$ (د) $x > 7$



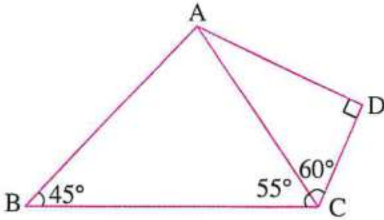
4 فى الشكل المقابل:

ما طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ ؟ ....

(أ) 12 سم (ب) 9 سم

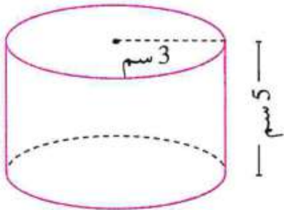
(جـ) 6 سم (د) 3 سم

2 أكمل كلًا مما يأتى بالإجابة الصحيحة:



5 فى الشكل المقابل:

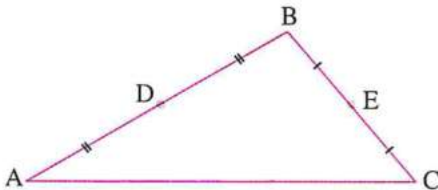
الترتيب التصاعدى للقطع المستقيمة الخمسة المرسومة وفقًا لأطوالها هو ....



6 فى الشكل المقابل:

المساحة السطحية للأسطوانة

تساوى .... سم^2 $(\pi \approx 3.14)$

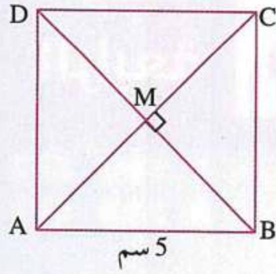


7 فى الشكل المقابل:

إذا كانت $D(-1 , -2)$, $E(2 , 3)$

منتصفى $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ على الترتيب

فإن طول $\overline{AC}$ = ... وحدة طول.



8 فى الشكل المقابل:

إذا كان ABCD مربعًا

فإن طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BD}$ = ... سم

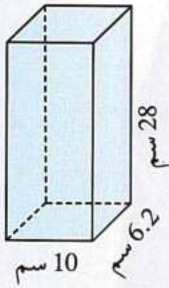
---

3 اجب عن الأسئلة الآتية:

x	−3	2	7	k
y	0	2	4	6

9 النقط فى الجدول المقابل تقع على استقامة واحدة

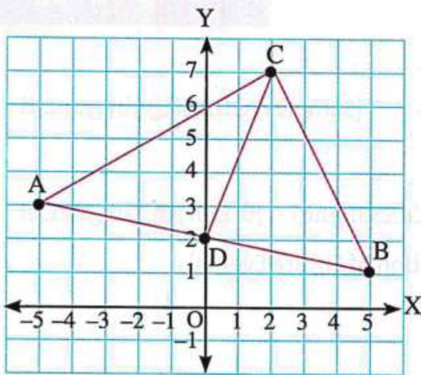
أوجد ميل المستقيم وقيمة k



10 فى الشكل المقابل:

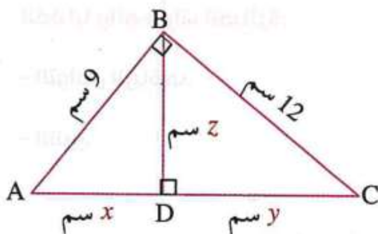
منشور قائم ارتفاعه 28 سم، إذا ازداد الارتفاع بمقدار 0.7 سم،

فما مقدار الزيادة فى المساحة السطحية للمنشور؟



11 فى الشكل المقابل:

أثبت أن: $m(\angle ADC) > m(\angle BDC)$



12 فى الشكل المقابل:

أوجد قيـم: x , y , z

الوحدة الرابعة 4 الإحصاء والاحتمال



دروس الوحدة

الدرس الأول: العينات (Samples)

الدرس الثانى: الاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية
(Probability - Prediction of Future Events)

يعد مفهوم العينة واختيارها من الأسس التى يقوم عليها توافر البيانات التى يتعامل معها الذكاء الاصطناعى، بينما يحدد الاحتمال النظرى القواعد الرياضية التى يستخدمها النموذج فى التنبؤ واستخلاص النتائج، وكلما كانت العينة جيدة مع حسابات احتمالية صحيحة يساعد الذكاء الاصطناعى للوصول إلى نتائج أكثر دقة.

- **فهل يمكن تطوير أساليب وطرق اختيار العينات فى مساعدة الذكاء الاصطناعى للحصول على نتائج أكثر دقة؟**

القضايا والمهارات الحياتية:

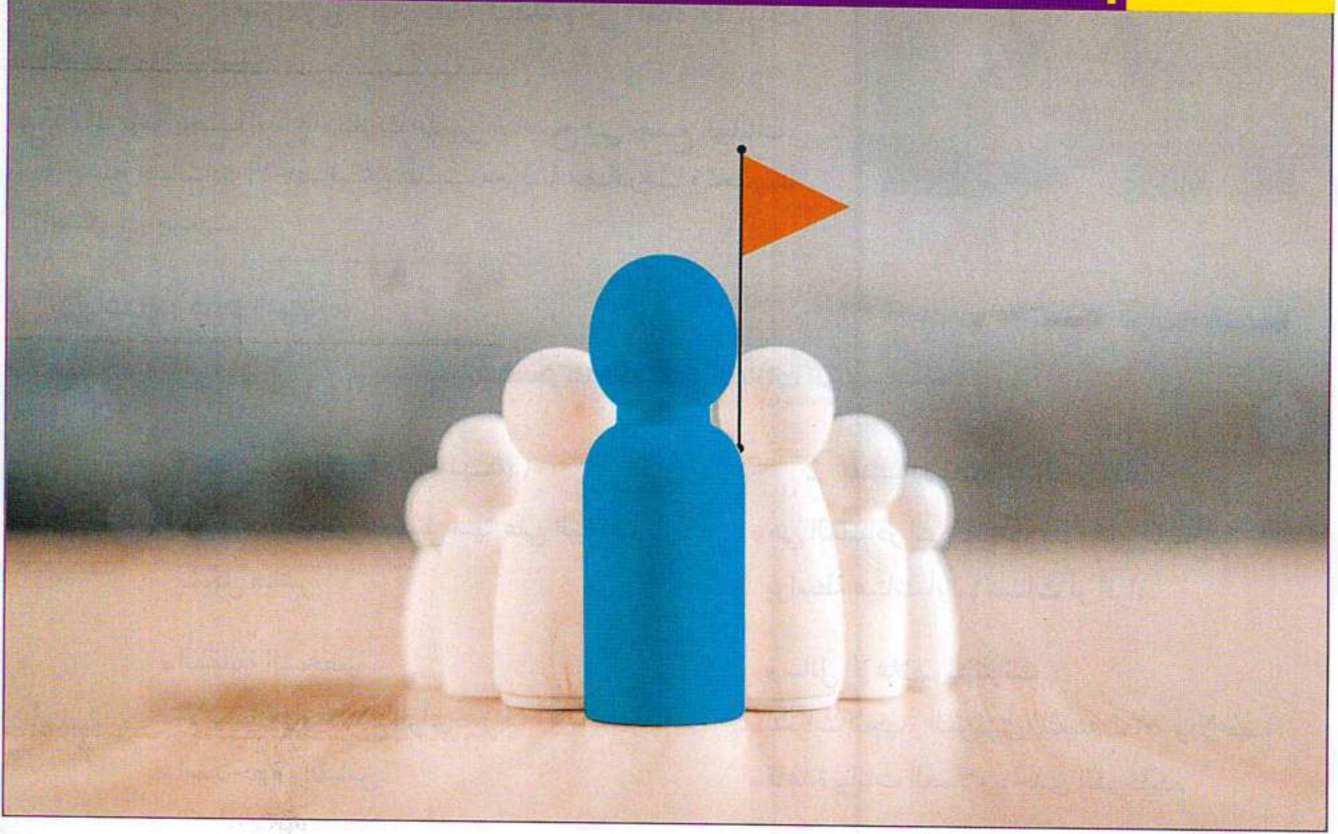
– التواصل الرياضى.
- التفكير الناقد.
– التنبؤ.
- اتخاذ القرار.

القيم:

– التكافل.
– الأمن الغذائى.
– الوعى الرياضى.

ذاكر | الدرس 1

العينات (Samples)



نواتج التعلم

- يتعرف الطالب على مصادر جمع البيانات.
- يتعرف الطالب على أساليب جمع البيانات.
- يتعرف الطالب على مفهوم العينة.
- يتعرف الطالب على أنواع العينات وطرق اختيارها.
- يحدد الطالب الطريقة الأفضل لاختيار عينة ما.

مفردات أساسية

- الاختيار المتحيز (Biased Selection)
- الاختيار العشوائى (Random Selection)
- عينة عشوائية بسيطة (Simple Random Sample)
- عينة عشوائية طبقية (Layer Random Sample)

فكر وناقش:

أراد أحد المعلمين معرفة الرياضة المفضلة لدى الطلاب فى مدرسته، فسأل فريق كرة القدم فقط، فكانت النتيجة التى توصل إليها أن «كرة القدم هى الرياضة المفضلة لجميع الطلاب فى المدرسة»

فهل هذا الاستنتاج دقيق؟



- **فى هذا الدرس سوف نتعلم مفهوم العينة وكيفية اختيارها، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.**

تعلم **جمع البيانات:**



- **يبدأ الباحث الإحصائى بجمع البيانات وتنظيمها وتحليلها وتمثيلها بيانيًا،** وذلك بغرض الوصول إلى نتائج دقيقة تستخدم فى اتخاذ القرارات الصحيحة والمناسبة.
- لذلك فإنه يجب اتباع أسلوب علمى صحيح فى جمع البيانات. وجمع البيانات الإحصائية يتطلب معرفة مصادرها وتحديد أسلوب جمعها.

أولًا مصادر جمع البيانات:

تنقسم مصادر جمع البيانات إلى:

	1 مصادر أولية (ميدانية)	2 مصادر ثانوية (تاريخية)
التعريف:	• هى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر.	• هى المصادر التى نحصل منها على البيانات بواسطة هيئات أو مؤسسات أو أفراد.
أمثلة:	• المقابلة الشخصية. • الاستبيان واستطلاع الرأى. • الملاحظة والقياس.	• وسائل الإعلام والإنترنت. • نشرات الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء. • قاعدة بيانات العملاء بإحدى الشركات.
المميزات:	• الدقة.	• توفير الوقت والمال والجهد.
العيوب:	• تحتاج إلى وقت ومجهود وتكلفة كبيرة. • تحتاج إلى عدد كبير من الباحثين.	• عدم دقة بعض المصادر أحيانًا.

مثال 1 **حدد: أى من مصادر البيانات الإحصائية الآتية أولية وأيها ثانوية؟**

1 التجارب العملية فى المعمل.

2 بيانات المنظمات الدولية.

3 الكتب والمراجع المتخصصة.

4 ملاحظة سلوك الطلاب داخل الفصول.



الحل

1 أولية. 2 ثانوية.

3 ثانوية. 4 أولية.

سؤال 1

حدد: أى من مصادر البيانات الإحصائية الآتية أولية وأيها ثانوية؟

1 البحث فى مواقع الإنترنت عن نتائج فريق كرة القدم.

2 استطلاع آراء الزملاء بالفصل عن الهواية المفضلة لديهم.

ثانيًا أساليب جمع البيانات:



- يتوقف الأسلوب المستخدم لجمع البيانات على الهدف المراد لأجله جمع هذه البيانات، ويتوقف أيضًا على حجم المجتمع الإحصائى:
- والمجتمع الإحصائى يعرف بأنه جميع المفردات التى يهتم الباحث بدراستها والتى تجمعها خصائص عامة واحدة، مثل:
  - تلاميذ مدرسة ما تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته التلميذ.
  - موظفى شركة ما يمثلون مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته الموظف.

أساليب جمع البيانات:

1 **أسلوب الحصر الشامل:** يقوم هذا الأسلوب على جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع الإحصائى بصورة مباشرة ويستخدم فى حصر جميع مفردات المجتمع.

2 **أسلوب العينات:** يقوم هذا الأسلوب على جمع البيانات من عينة ممثلة للمجتمع كله وإجراء البحث عليها، ثم تعميم النتائج على المجتمع كله.

أمثلة على أساليب جمع البيانات (المميزات والعيوب)

	1 أسلوب الحصر الشامل	2 أسلوب العينات
الأمثلة:	• التعداد العام للسكان. • الانتخابات. • عمل قاعدة بيانات للطلاب فى إحدى المدارس.	• فحص عينة دم مريض. • معرفة درجة تلوث عينة من المياه بالخزان. • فحص عينة من منتجات أحد المصانع لبحث مدى مطابقتها للمواصفات.
المميزات:	• دقة النتائج وشمولها - عدم التحيز - تمثيل جميع مفردات المجتمع الإحصائى.	• توفير الوقت والجهد والتكاليف.
العيوب:	• يحتاج إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة عالية.	• يعطى نتائج غير دقيقة خاصة فى حالة إذا كانت العينة المختارة غير ممثلة للمجتمع الإحصائى تمثيلًا صادقًا، وتسمى بالعينة المتحيزة.

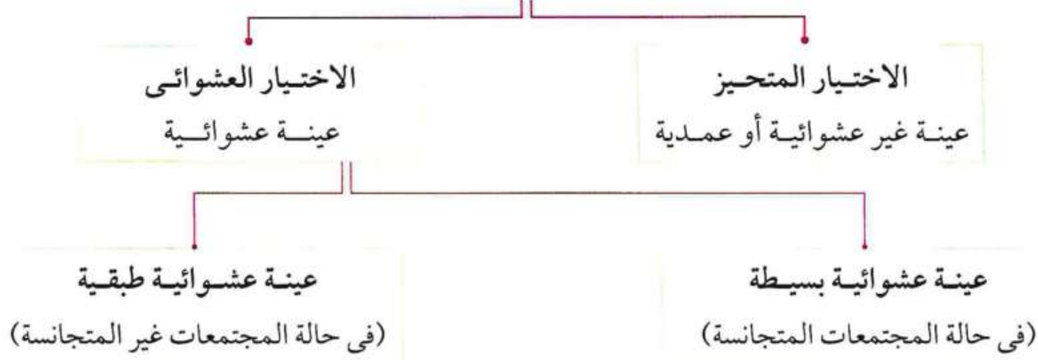
نقاط هامة

يعتبر أسلوب العينات هو الطريقة الوحيدة لدراسة المجتمعات الآتية:

- جمع بيانات عن المجتمعات الكبيرة غير المحدودة، **مثل بحث مكونات رمال الصحراء.**
- بعض المجتمعات التى يؤدى فيها أسلوب الحصر الشامل إلى خسائر فادحة، **مثل فحص دم مريض؛ لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة.**

العينات:

العينة هى جزء صغير من مجتمع كبير يشبه المجتمع ويمثله.



أولًا الاختيار المتحيز (عينة غير عشوائية):

هو اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع الإحصائى بحيث تناسب أهداف البحث ، **مثل:** عند دراسة مدى رضا الموظفين فى إحدى الشركات عن برنامج تدريبى جديد يجب اختيار العينة من الموظفين الذين التحقوا بالبرنامج التدريبى فعليًّا دون باقى الموظفين، وهذا الاختيار لا يعتبر عشوائيًّا.

ثانيًا الاختيار العشوائى (عينة عشوائية):

هو أختيار العينة بحيث تكون كل مفردة من مفردات المجتمع لها نفس الفرصة فى الاختيار، مثل اختيار عينة من الخريجين لمعرفة نوع التعليم، ومن أهم أنواع العينات العشوائية:

1 العينة العشوائية البسيطة. 2 العينة العشوائية الطبقية.

1 العينة العشوائية البسيطة:

- **تستخدم مع المجتمعات المتجانسة، ويتم اختيارها بطريقتين حسب عدد مفردات المجتمع كما يلى:**

الطريقة الأولى (إذا كان حجم المجتمع صغيرًا)

وتتم هذه الطريقة كالآتى:

1 يتم تحضير بطاقة ورقية لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائى، ويكتب عليها اسم أو رقم المفردة بحيث تكون جميع البطاقات متماثلة من حيث اللون والمقاس.

2 تطبق كل البطاقات بطريقة متماثلة بحيث لا يظهر الرقم نهائيًّا، ثم توضع فى صندوق وتخلط جيدًا.

3 يتم اختيار العينة بسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًّا دون النظر داخله، ثم نقلب البطاقات جيدًا، ونختار بطاقة ثانية، وهكذا حتى ننتهى من اختيار العدد المطلوب للعينة.



وتعتبر هذه الطريقة مناسبة مثلًا لاختيار عينة مكونة من 5 لاعبين فى فريق به 35 لاعبًا.

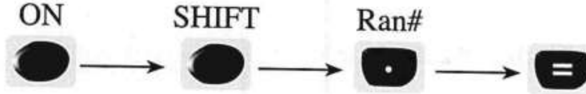
الطريقة الثانية: (إذا كان حجم المجتمع كبيرًا)



وتتم هذه الطريقة كالآتى:

1 يتم ترقيم جميع مفردات المجتمع محل الدراسة.

2 نختار العينة من هذه المفردات باستخدام خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة العلمية، **ويتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار لليمين:**



فيظهر رقم عشرى بين 0.000 و 0.999،

وفى حالة ظهور رقم عشرى واحد بعد العلامة العشرية

نضيف صفرين لجعله جزءًا من ألف، هكذا (0.5 ⟵ 0.500)

وفى حالة ظهور رقمين عشريين بعد العلامة العشرية

نضيف صفرًا على اليمين لجعله جزءًا من ألف هكذا (0.72 ⟵ 0.720)

ثم نأخذ تلك الأرقام بعد تجاهل العلامة العشرية، ونختار المفردة الممثلة لها.

ومع تكرار الضغط على مفتاح (=) يتوالى ظهور الأرقام حتى نصل إلى عدد العينة الذى نريده، وتُستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسة، كما يتم أيضًا استبعاد الأرقام التى تم اختيارها من قبل.

وتعتبر هذه الطريقة مناسبة لاختيار عينة مكونة من 50 تلميذًا من مدرسة بها 600 تلميذ.

نقاط هامة

- عدد مفردات العينة الأنسب لإجراء أى استبيان يكون فى المتوسط 10 % من عدد مفردات مجتمع الدراسة.

2 العينة العشوائية الطبقية:

تستخدم مع المجتمعات الإحصائية غير المتجانسة: أى المقسمة إلى مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، وتتم من خلال الخطوات الآتية:

1 تُقسم مفردات المجتمع الإحصائى إلى طبقات تبعًا للصفات المكونة للمجتمع.

2 يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع، وتسمى بالعينة الطبقية، فمثلًا عند دراسة المستوى الدراسى لطلاب مدرسة بها 400 تلميذ وتلميذة، وكانت نسبة البنين إلى البنات هى 3 : 1، وأردنا اختيار عينة مكونة من 40 تلميذًا، فلا بد من اختيار 10 تلاميذ من البنين و 30 تلميذة من البنات بطريقة عشوائية؛ لتكون العينة ممثلة لطبقات المجتمع محل الدراسة.

مثال 2



مدرسة بها 400 طالب، وتريد إدارة المدرسة تطوير خدمات المكتبة المدرسية فى ضوء معرفة آراء الطلاب حول الأنشطة المقدمة لهم من خلال إعداد استبيان لهذا الغرض، فإذا كان هذا الاستبيان يعطى لعينة عشوائية تمثل % 10 من إجمالى عدد الطلاب بهذه المدرسة،

وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

∵ عدد الطلاب بالمدرسة = 400 طالب

∵ نسبة العينة المطلوبة هى 10%

∴ عدد طلاب العينة العشوائية المختارة = $\frac{10}{100} \times 400 = 40$ طالبًا

وبالتالى يجب اختيار عينة عشوائية تمثل 40 طالبًا كما يلى:

- يتم ترقيم جميع طلاب المدرسة من (1) إلى (400).
- تستخدم الآلة الحاسبة لاختيار 40 طالبًا بالطريقة السابق ذكرها، والتى تنحصر بين 0 ، 400 والأرقام العشوائية التى تظهر أكبر من 400 يتم استبعادها، وكذلك يتم استبعاد الأرقام المكررة.

فمثلًا: بالضغط على المفاتيح : ON ← SHIFT ← Ran# ← =

- فإذا حصلنا على الكسر العشرى 0.258 يكون رقم الطالب المختار هو 258

وإذا حصلنا على الكسر العشرى 0.37 يكون رقم الطالب المختار هو 370

وإذا حصلنا على الكسر العشرى 0.534 يتم استبعاده.

لأن رقم 534 أكبر من 400 ونستمر هكذا حتى نحصل على 40 رقمًا.

- وبفرض أن الآلة الحاسبة أخرجت الأرقام الموضحة بالجدول المقابل، فيكون الطلاب الذين يحملون هذه الأرقام هم العينة المختارة لإجراء هذا الاستبيان.

385	199	24	356	201
333	119	145	312	88
277	105	391	17	258
228	53	167	344	62
41	304	121	370	9
289	152	76	321	215
398	94	266	35	360
183	295	33	239	174

سؤال 2

إذا كنت تريد أخذ عينة من مدرستك لعمل بحث عن ممارسة الرياضة من قبل الطلاب بشكل يومى أم لا ويتم أخذ عينة عشوائية من المدرسة حجمها % 10 من إجمالى عدد الطلاب بالمدرسة، **وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة، علمًا بأن العدد الكلى للطلاب فى المدرسة 500 طالب.**

مثـال 3



مدرسة بها 250 طالبًا فى المرحلة الابتدائية و200 طالب فى المرحلة الإعدادية و150 طالبًا فى المرحلة الثانوية، أرادت معلمة عمل استبيان على عينة طبقية مكونة من 60 طالبًا بحيث تكون ممثلة لجميع المراحل التعليمية بحسب حجمها.

احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

الحـل

- العدد الكلى للطلاب = 250 + 200 + 150 = 600 طالب.

$$\text{عدد مفردات الطبقة فى العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

- عدد مفردات طلاب المرحلة الابتدائية فى العينة = $\frac{250}{600} \times 60 = 25$ طالبًا.
- عدد مفردات طلاب المرحلة الإعدادية فى العينة = $\frac{200}{600} \times 60 = 20$ طالبًا.
- عدد مفردات طلاب المرحلة الثانوية فى العينة = $\frac{150}{600} \times 60 = 15$ طالبًا.

مثـال 4



شركة كبيرة بها 6,000 موظف قُسِّموا إلى فئات وظيفية، حيث يبلغ عدد الموظفين الإداريين 900 موظف، فإذا أراد باحث سحب عينة طبقية مناسبة لتمثيل جميع الموظفين، وتم اختيار 36 موظفًا إداريًا ضمن هذه العينة، **فما هو الحجم الكلى لهذه العينة؟**

الحـل

$$\text{حجم العينة} = \frac{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}}{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}} \times \text{عدد مفردات الطبقة فى العينة}$$

$= \frac{6,000}{900} \times 36 = 240$ موظفًا.

سؤال 3

فى إحدى الشركات، يتوزع الموظفون حسب الدرجات الوظيفية على النحو التالى: 500 موظف فى الدرجة الأولى، و300 موظف فى الدرجة الثانية، و200 موظف فى الدرجة الثالثة، فإذا أردنا سحب عينة طبقية مكونة من 100 موظف بحيث تمثل العينة جميع الدرجات الوظيفية حسب حجمها فى الشركة.

فاحسب عدد مفردات كل طبقة (درجة وظيفية) يجب اختيارها فى العينة.

العينات (Samples)

تذكر فهم تطبيق تحليل تقييم ابتكار

أسئلة الكتاب المدرسى

جمع البيانات:

1 أكمل ما يأتى:

1 من أساليب جمع البيانات .... ، ....

2 تنقسم مصادر جمع البيانات إلى مصادر .... ومصادر ....

3 يتميز أسلوب العينات بتوفير .... و .... و ....

4 الأسلوب الأنسب لحصر التعداد العام للسكان هو ....

2 اختر الإجابة الصحيحة:

1 من المصادر الثانوية لجمع البيانات مما يلى ....
(ا) المقابلة الشخصية. (ب) الاستبيانات. (جـ) قاعدة بيانات الموظفين. (د) الملاحظة والقياس.

2 من المصادر الأولية لجمع البيانات مما يلى ....
(ا) نشرات مراكز الإحصاء. (ب) بيانات طلاب المدرسة بالسنة الماضية.
(جـ) الاستبيانات. (د) سجلات بيانات موظفى إحدى المؤسسات.

3 استطلاع الرأى يعتبر من المصادر ....
(ا) الثانوية. (ب) الأولية. (جـ) التاريخية. (د) الطبقية.

4 يعتبر أسلوب العينات هو الأسلوب المناسب لكل مما يأتى ما عدا:
(ا) فحص إنتاج مصنع. (ب) فحص رمال الصحراء.
(جـ) معرفة تعداد السكان. (د) فحص دم مريض.

5 اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة ....
(ا) العشوائية. (ب) الطبقية. (جـ) العمدية. (د) العنقودية.

6 مصنع به 125 عاملًا وهم: 75 فنيًا، و50 مهندسًا، أخذت عينة طبقية حجمها 50 فردًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، فإن عدد المهندسين فى هذه العينة يساوى .... مهندسًا.
(ا) 30 (ب) 20 (جـ) 25 (د) 15

7 مستشفى به 40 طبيبًا و200 ممرضة، أخذت عينة طبقية حجمها 36 فردًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، فإن عدد الممرضات فى هذه العينة يساوى .... ممرضة.
(ا) 6 (ب) 18 (جـ) 24 (د) 30

8 مدرسة بها 1,000 طالب وطالبة، منهم 300 ولد و700 بنت، تقرر أخذ عينة طبقية مناسبة حجمها 20 فردًا لتقييم خدمات المكتبة، فإن عدد الأولاد الذين يجب اختيارهم فى هذه العينة يساوى .... أولاد.
(ا) 4 (ب) 6 (جـ) 2 (د) 3

3 أى من مصادر البيانات الإحصائية التالية أولية؟ وأيها ثانوية؟

1 البحث فى مواقع الإنترنت عن نتائج المنتخب المصرى لكرة القدم فى بطولة الأمم الإفريقية السابقة.

2 استطلاع آراء زملائك بالفصل عن اسم المادة الدراسية المفضلة لديهم.

3 استطلاع آراء تلاميذ فصلك عن المكان الذى يريدون أن يذهبوا إليه فى الرحلة القادمة.

4 أن تقوم بإحصاء عدد المقاعد الموجودة فى كل فصل من فصول مدرستك.

5 أن تقوم بعمل بحث عن أعداد الناجحين فى كل مادة من المواد الدراسية فى مدرستك فى الدور الأول العام الماضى من واقع سجلات مدرستك.

4 **اكتب الأسلوب المناسب «الحصر الشامل أم العينات» لجمع البيانات فى كل مما يأتى:**

1 عدد الحضور فى ندوة جامعية.
2 معدل الأمطار فى محافظة معينة.
3 عدد السيارات المارة على جسر خلال ساعة.
4 تحديد درجة الملوحة فى البحيرة.
5 متوسط أسعار الخضراوات هذا الأسبوع.
6 نتائج فحص تربة حقل معين.

5 قامت مدرسة بها 350 طالبًا بعمل استطلاع رأى لمعرفة أى من المنتجات التى تباع فى المقصف المدرسى أفضل بالنسبة للطلاب (مشروب ساخن - بيتزا - عصائر مثلجة - وجبة ساخنة) وتم إعطاء رقم لكل طالب، ثم اختيرت عينة عشوائية لعمل هذا الاستطلاع حجمها 10 % من عدد طلاب المدرسة، **حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام الطلاب فى هذه العينة.**

6 قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى 200 عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من 1 إلى 200 ، ثم تم اختيار عينة تمثل 10 % لسؤالهم عما يفضلون من: مشروبات ساخنة - وجبات خفيفة - مثلجات.
حدد باستخدام الآلة الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.



7 مدرسة بها 200 طالب و40 طالبة، أرادت إدارة المدرسة عمل استطلاع رأى لعينة عددها 12 طالبًا وطالبة تُمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

- العدد الإجمالى للطلّاب والطالبات = ... + ... = ...
- عدد مفردات الطلّاب فى العينة = $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × .... = ...
- عدد مفردات الطالبات فى العينة = $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × .... = ...

8 يوجد فى أحد المصانع 180 عاملًا، 120 فنيًا، 80 مهندسًا، أخذت عينة طبقية حجمها 57 شخصًا، **أوجد عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

9 مصنع لإنتاج التليفزيونات ينتج ثلاثة موديلات، أعدادها كالتالى: 600 من الموديل الأول، و 800 من الموديل الثانى، و900 من الموديل الثالث، فإذا أراد مدير المصنع أخذ عينة عشوائية تقدر بـ 10 % من الإجمالى ويمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه، **فحدد عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

10 يُراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها من مجتمع مكون من 5,000 مفردة ومقسم إلى أربع طبقات، حيث كان عدد مفردات الطبقة الأولى 1,500 مفردة، وكان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة 225 مفردة، **أوجد حجم العينة.**

تفكير إبداعى TIMSS

11 يُراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها من مجتمع مكون من 40,000 مفردة ومقسم إلى ثلاث طبقات بياناتها كما بالجدول التالى:

رقم الطبقة	1	2	3
عدد مفردات الطبقة	12,000	20,000	8,000

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة 240 مفردة، **فأوجد حجم العينة كلها.**

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 من المصادر الأولية لجمع البيانات مما يلى ....

(ا) وسائل الإعلام. (ب) مواقع الإنترنت.

(جـ) الاستبيانات. (د) قاعدة بيانات الموظفين.

2 الأسلوب المناسب لفحص نسبة الأملاح بمياه إحدى الآبار هو ....

(ا) الحصر الشامل. (ب) العينات.

(جـ) الاستبيانات. (د) المقابلة الشخصية.

3 من مميزات أسلوب الحصر الشامل ....

(ا) التمييز. (ب) عدم الشمول.

(جـ) التمثيل لجزء من مفردات المجتمع الإحصائى. (د) الدقة.

4 إذا كان: $n(Y^2) = 9$, $n(X \times Y) = 12$ ، فما قيمة $n(X^2)$ ؟ ....

(ا) 16 (ب) 4 (جـ) 9 (د) 25

5 ما بُعد النقطة $A(-4, 3)$ عن نقطة الأصل؟ ....

(ا) 4 وحدات طول. (ب) 5 وحدات طول. (جـ) 3 وحدات طول. (د) 6 وحدات طول.

2 أكمل ما يأتى:

1 الأسلوب الأنسب لفحص دم مريض هو ....

2 مصنع به 600 عامل، و1,000 عاملة، أراد مدير المصنع عمل استبيان على عينة عددها 48 عاملًا وعاملة تمثل كل طبقة بحسب حجمها، فإن عدد مفردات طبقة العمال يساوى .... عامل.

3 مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها يساوى 7سم بدلالة π تساوى .... $سم^2$.

3 أجب عما يأتى:

1 مدرسة بها 720 طالبًا و480 طالبة، أرادت عمل استبيان على عينة قوامها 40 طالبًا وطالبة تُمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **احسب عدد مفردات كل طبقة.**

2 **أوجد** العدد الذى إذا طُرح من كل من الأعداد 15 , 9 , 6 فإنها تصبح متناسبة.

3 **أوجد** ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-3, 0)$, $(-1, 4)$

ذاكر

الدرس 2

الاحتمال - توقع الأحداث المستقبلية
(Probability - Prediction of Future Events)



نواتج التعلم

- يتذكر الطالب مفهوم الاحتمال النظرى.
- يستخدم الطالب قوانين الاحتمال لتوقع حدوث أحداث مستقبلية.

مفـردات أسـاسـية

- الاحتمال **Probability**
- توقع الأحداث المستقبلية **Prediction of Future Events**



فكر وناقش



- يتدرب مالك على تسـديد ضربات الجزاء فى لعبة كرة اليد، سـدد مالك 10 ضربات فأحرز منها 7 أهداف، فإذا سـدد مالك 30 ضربة، فما عدد الأهداف المتوقع أن يحرزها مالك؟

- فى هذا الدرس سـوف تتعلـم مفهوم الاحتـمال وتوقع الأحداث المستقبلية، مما سيمكنك من حل مثل هذه المشكلات الحياتية.

تعلم الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية



- يُساعد الاحتمال على توقع حدوث الأحداث المستقبلية بناءً على المعلومات المتاحة لدينا؛ فهو يمنحنا فكرة عن مدى إمكانية حدوث كل نتيجة.
- يُستخدم الاحتمال فى حياتنا اليومية فى كثير من المجالات، مثل:
الأرصاد الجوية، الاقتصاد، الألعاب الرياضية والمنافسات، الأبحاث العلمية... وغيرها.

الاحتمال النظرى:

- **الاحتمال النظرى يقوم على مبدأ تكافؤ الفرص أو تساوى الإمكانيات،** ويساوى النسبة بين عدد نواتج الحدث والعدد الكلى للنواتج.

احتمال وقوع أى حدث (A) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث (A)}}{\text{العدد الكلى للنواتج}}$

تذكر أن
يرمز لاحتمال وقوع الحدث (A) بالرمز P (A)

مثال 1

عند أخذ عينة مكونة من 20 طالبًا من بين 600 طالب فى إحدى المدارس وسؤالهم عن المادة المفضلة لديهم، **كانت إجاباتهم كما بالجدول التالى:**

المادة الدراسية	التكرار
الرياضيات	5
اللغة العربية	8
العلوم	4
الدراسات الإجتماعية	3

1 إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الطالب من مفضلى مادة الرياضيات؟
2 ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الرياضيات بالمدرسة؟
3 ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الدراسات الاجتماعية بالمدرسة؟
4 ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة العلوم بالمدرسة؟

الحل

1 احتمال أن يكون الطالب من مفضلى مادة الرياضيات = $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25$

2 العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الرياضيات بالمدرسة = $\frac{1}{4} \times 600 = 150$ طالبًا

3 ∵ احتمال أن يكون الطالب من مفضلى مادة الدراسات الاجتماعية = $\frac{3}{20} = 0.15$

∴ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الدراسات الاجتماعية بالمدرسة = $\frac{3}{20} \times 600 = 90$ طالبًا

4 ∵ احتمال أن يكون الطالب من مفضلى مادة العلوم = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2$

∴ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة العلوم بالمدرسة = $\frac{1}{5} \times 600 = 120$ طالبًا

تذكر أن
يمكن كتابة الاحتمال على صورة كسر اعتيادى أو كسر عشرى أو نسبة مئوية.

سؤال 1

عند أخذ عينة مكونة من 30 طالبًا من بين 300 طالب فى إحدى المدارس وسؤالهم عن الرياضة المفضلة لديهم، وجد أن 10 طلاب يفضلون كرة اليد و20 طالبًا يفضلون كرة القدم، فإذا اختير طالب عشوائيًّا، **فما احتمال أن يكون الطالب من مفضلى كرة القدم؟ وما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون كرة القدم بالمدرسة؟**

مثال 2



ينتج مصنع للأجهزة الكهربائية نوعين من التليفزيونات لإجراء دراسة لتعديل كمية الإنتاج وفقًا لمتطلبات السوق، تم اختيار عينة عشوائية من مبيعات 5 منافذ بيع للمصنع، حجم كل منها 40 تليفزيونًا؛ **فكانت بياناتها كما بالجدول التالى:**

رقم المنفذ	1	2	3	4	5
المبيعات من النوع الأول	15	17	28	30	20
المبيعات من النوع الثانى	25	23	12	10	20

1 أى النوعين الأكثر طلبًا؟ وبماذا تنصح المصنع؟

2 إذا كان الإنتاج الكلى لهذا المصنع 2,000 جهاز تلفزيون، فما العدد الذى تتوقع إنتاجه من النوع الأول وفقًا لهذه الدراسة؟

الحل

1 المبيعات الكلية فى المنافذ الخمسة من النوع الأول = $15 + 17 + 28 + 30 + 20 = 110$ تلفزيونات.

المبيعات الكلية فى المنافذ الخمسة من النوع الثانى = $25 + 23 + 12 + 10 + 20 = 90$ تلفزيونًا.

∴ النوع الأول هو الأكثر طلبًا، وننصح المصنع بزيادة الإنتاج من النوع الأول.

2 احتمال البيع من النوع الأول = $\frac{\text{عدد الأجهزة المبيعة من النوع الأول}}{\text{عدد الأجهزة المبيعة من كلا النوعين}} = \frac{110}{200} = \frac{11}{20} = 0.55$

∴ العدد المتوقع إنتاجه من النوع الأول = احتمال البيع من النوع الأول × الإنتاج الكلى من كلا النوعين

= $2,000 \times 0.55 = 1,100$ جهاز تليفزيون.

سؤال 2

ينتج مصنع للمشروبات الغازية نكهتين رئيسيتين: ليمون وبرتقال، ولإجراء دراسة لتعديل كمية الإنتاج وفقًا لمتطلبات السوق، تم اختيار عينة عشوائية من مبيعات 4 محلات تجزئة للمصنع، حجم كل منها 300 عبوة، **وكانت البيانات مقسمة كما يلى:**

رقم المحل	1	2	3	4
مبيعات نكهة الليمون	120	95	150	110
مبيعات نكهة البرتقال	180	205	150	190

1 **أى النكهتين أكثر طلبًا؟ وبماذا تنصح المصنع؟**

2 **إذا كان الإنتاج الكلى لهذا المصنع 6,000 عبوة، فما العدد الذى تتوقع إنتاجه من نكهة البرتقال وفقًا لهذه الدراسة؟**

مثال 3



عينة عشوائية تتكون من 50 تلميذًا في إحدى المدارس شملهم استطلاع للرأي عن الرياضة المفضلة لديهم، وجد أن 35 تلميذًا منهم يفضلون كرة القدم، و20 تلميذًا يفضلون السباحة، و15 تلميذًا يفضلون كرة القدم والسباحة معًا، **فإذا اختير تلميذ عشوائيًا:**

أولاً: احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

1 A حدث «التلميذ المختار يفضل إحدى الرياضتين على الأقل».

2 B حدث «التلميذ المختار يفضل إحدى الرياضتين فقط».

3 C حدث «التلميذ المختار لا يفضل أيًا من الرياضتين».

ثانيًا: إذا كان العدد الإجمالي للتلاميذ في المدرسة 800 تلميذ:

1 ما العدد المتوقع للتلاميذ الذين يفضلون رياضة السباحة فقط؟

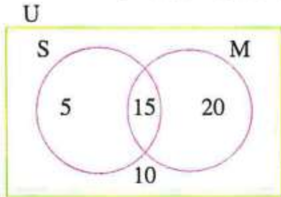
2 ما العدد المتوقع للتلاميذ الذين يفضلون رياضة واحدة على الأكثر من كرة القدم والسباحة؟

الحل

◂ عدد التلاميذ الذين يفضلون رياضة كرة القدم فقط هو 20 تلميذًا. (لأن: $20 = 35 - 15$)

◂ عدد التلاميذ الذين يفضلون رياضة السباحة فقط هو 5 تلاميذ. (لأن: $5 = 20 - 15$)

◂ عدد التلاميذ الذين لا يفضلون أيًا من الرياضتين هو 10 تلاميذ. (لأن: $10 = 50 - (20 + 5 + 15)$)



وبالتالي بفرض أن M هي مجموعة التلاميذ الذين يفضلون رياضة كرة القدم، و S هي مجموعة التلاميذ الذين يفضلون رياضة السباحة ، لذلك يمكن توضيح أعداد التلاميذ الذين شملهم الاستطلاع باستخدام شكل ڤن المقابل.

أولاً: 1 احتمال $(A) = \frac{\text{عدد التلاميذ الذين يفضلون إحدى الرياضتين على الأقل}}{\text{عدد التلاميذ الإجمالي بالعينة}} = \frac{20 + 15 + 5}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8$

◂ «يفضل إحدى الرياضتين على الأقل» تعني يفضل رياضة واحدة فقط أو الرياضتين معًا.

2 احتمال $(B) = \frac{\text{عدد التلاميذ الذين يفضلون إحدى الرياضتين فقط}}{\text{عدد التلاميذ الإجمالي بالعينة}} = \frac{20 + 5}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$

◂ «يفضل إحدى الرياضتين فقط» تعني يفضل رياضة واحدة فقط ولا يفضل الرياضتين معًا.

3 احتمال $(C) = \frac{\text{عدد التلاميذ الذين لا يفضلون أيًا من الرياضتين}}{\text{عدد التلاميذ الإجمالي بالعينة}} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2$

ثانيًا: 1 ∵ احتمال أن يكون التلميذ المختار يفضل رياضة السباحة فقط $= \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0.1$

∴ العدد المتوقع للتلاميذ في المدرسة الذين يفضلون رياضة السباحة فقط $= \frac{1}{10} \times 800 = 80$ تلميذًا.

2 احتمال أن يكون التلميذ المختار يفضل رياضة واحدة على الأكثر من كرة القدم والسباحة $= \frac{20 + 5 + 10}{50} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$

◂ «يفضل رياضة واحدة على الأكثر» تعني يفضل رياضة واحدة فقط أو لا يفضل أيًا من الرياضتين.

∴ العدد المتوقع للتلاميذ في المدرسة الذين يفضلون رياضة واحدة على الأكثر من كرة القدم والسباحة $= \frac{7}{10} \times 800 = 560$ تلميذًا.

مثـال 4

عينة عشوائية تتكون من 80 جهازًا لأحد المتاجر الكبرى، موزعين حسب نوع الجهاز (كمبيوتر ، هاتف محمول) وسبب الشراء (للدراسة ، للعمل) كما بالجدول المقابل:

	للدراسة	للعمل	المجموع
هاتف محمول	40	10	50
كمبيوتر	5	....	....
المجموع	....	....	....

أولًا: أكمل الجدول.

ثانيًا: إذا اختير أحد الأجهزة المبيعة عشوائيًّا، **فاحسب احتمال كل من الأحداث الآتية:**

1. A حدث «الجهاز المختار هو كمبيوتر».
2. B حدث «الجهاز المختار هو لغرض الدراسة».
3. C حدث «الجهاز المختار هو كمبيوتر لغرض العمل».
4. D حدث «الجهاز المختار هو كمبيوتر أو جهاز لغرض الدراسة».

ثالثًا: إذا كان العدد الكلى للأجهزة المبيعة فى المتجر خلال شهر يساوى 4,800 جهاز، **فما العدد المتوقع لأجهزة الكمبيوتر التى اختيرت لغرض العمل فى هذا الشهر؟**

الحـل

أولًا:

	للدراسة	للعمل	المجموع
هاتف محمول	40	10	50
كمبيوتر	5	25	30
المجموع	45	35	80

ثانيًا:

1. $P(A) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$
2. $P(B) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$
3. $P(C) = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$
4. $P(D) = \frac{5+25+40}{80} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$

أو $P(D) = \frac{30+45-5}{80} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$

ثالثًا: ∵ احتمال أن يكون الجهاز المختار هو كمبيوتر لغرض العمل $= \frac{5}{16}$

∴ العدد المتوقع لأجهزة الكمبيوتر لغرض العمل $= \frac{5}{16} \times 4,800 = 1,500$ جهاز

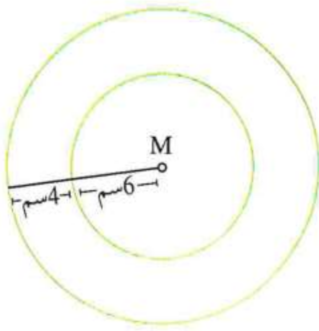
سؤال 3

عينة عشوائية تتكون من 60 شخصًا شملهم استطلاع للرأى عن فرق كرة القدم التى يشجعونها، فوجد أن 40 شخصًا منهم يشجعون النادى الأهلى و28 شخصًا يشجعون نادى برشلونة و12 شخصًا يشجعون الناديين معًا، فإذا اختير شخص عشوائيًّا من أفراد العينة، **فاحسب احتمال كل من الأحداث الآتية:**

1. A حدث **«أن يكون الشخص من مشجعى أحد الناديين على الأقل».**
2. B حدث **«أن يكون الشخص من مشجعى أحد الناديين فقط».**
3. C حدث **«أن يكون الشخص من مشجعى الناديين معًا».**
4. D حدث **«أن يكون الشخص من مشجعى النادى الأهلى فقط».**

مثال 5

فى تدريبات أحد فرق كرة السلة، طلب المدرب من اللاعبين التصويب على اللوحة المقابلة، فإذا أصاب كل اللاعبين اللوحة:



1 فما احتمال أن يصيب اللاعب الجزء المظلل من اللوحة؟

2 إذا صوب 250 لاعبًا في هذا التدريب، فما العدد المتوقع من اللاعبين الذين يستطيعون إصابة الجزء المظلل من اللوحة؟

الحل

1 احتمال أن يصيب اللاعب الجزء المظلل = $\frac{\text{مساحة الجزء المظلل}}{\text{المساحة الكلية}}$

∵ مساحة الدائرة الكبرى تساوى 100π سم^2 (لأن: $A = \pi r^2 = \pi (10)^2 = 100\pi$)

∵ مساحة الدائرة الصغرى تساوى 36π سم^2 (لأن: $A = \pi r^2 = \pi (6)^2 = 36\pi$)

∴ مساحة الجزء المظلل تساوى 64π سم^2 (لأن: $100\pi - 36\pi = 64\pi$)

∴ احتمال أن يصيب اللاعب الجزء المظلل = $\frac{64\pi}{100\pi} = \frac{16}{25} = 0.64$

2 العدد المتوقع للاعبين الذين يستطيعون إصابة الجزء المظلل = $\frac{16}{25} \times 250 = 160$ لاعبًا

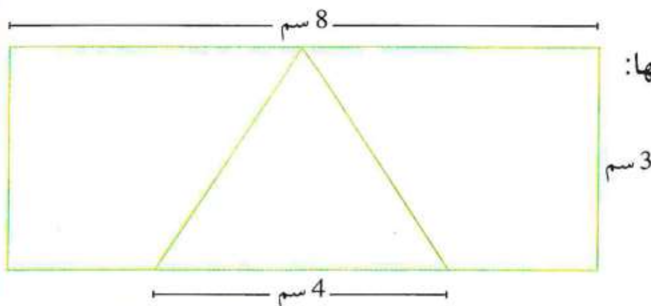
تذكــر أن

- مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها ($A = \frac{1}{2} b \times h$)
- مساحة سطح المربع = طول الضلع × نفسه ($A = s^2$)
- مساحة سطح المستطيل = الطول × العرض ($A = \ell \times w$)
- مجموع احتمالات الأحداث الأولية لأى تجربة عشوائيـة = 1

سؤال 4

فى الشكل المقابل:

إذا صوب طالب سهمًا على اللوحة المستطيلة المقابلة وأصابها:



1 **فأوجد** احتمال أن يصيب الطالب المنطقة المظللة.

2 إذا صوب 52 طالبًا كل منهم سهمًا،

فما عدد المرات المتوقع لإصابة المنطقة المظللة؟

مثال 6 اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان احتمال فوز فريق في كرة اليد في مباراة واحدة هو 0.65، فما عدد المباريات المتوقع أن يفوز بها من إجمالي 40 مباراة؟ ....

(أ) 24 مباراة (ب) 26 مباراة (جـ) 30 مباراة (د) 32 مباراة

2 مصنع ينتج 400 ثلاجة يوميًّا، إذا كان احتمال أن تكون الثلاجة معيبة هو 0.05، فإن عدد الثلاجات السليمة المتوقع إنتاجها في اليوم هو .... ثلاجة.

(أ) 250 (ب) 320 (جـ) 380 (د) 420

3 إذا كان احتمال الحصول على محصول جيد لفاكهة التفاح في إحدى المزارع هو $\frac{4}{7}$، وقام المزارعون بزراعة X فدانًا، وكان عدد الأفدنة المتوقع أن تنتج محصولًا جيدًا هو 32 فدانًا، فما قيمة X؟ ....

(أ) 18 (ب) 32 (جـ) 48 (د) 56

4 مدرسة إجمالي عدد طلابها 800 طالب، اختيرت منهم عينة عشوائية مكونة من 50 طالبًا، فوجد أن عدد البنات 32 بنتًا، فما عدد الأولاد المتوقع في المدرسة؟ .... ولدًا.

(أ) 186 (ب) 250 (جـ) 288 (د) 302

5 إذا كان فريق العمل مكونًا من 20 موظفًا، منهم 10 مهندسين، و 6 فنيين، و 4 إداريين، فإذا اختير موظف واحد عشوائيًّا لتمثيل الفريق، فما احتمال أن يكون الموظف المختار مهندسًا أو فنيًّا؟ ....

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{1}{10}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{5}$

الحل

1 ∵ احتمال فوز الفريق هو 0.65

∴ عدد المباريات المتوقع أن يفوز بها الفريق من إجمالي 40 مباراة = $0.65 \times 40 = 26$ مباراة.

2 ∵ احتمال أن تكون الثلاجة معيبة هو 0.05

∴ احتمال أن تكون الثلاجة سليمة هو 0.95 (لأن: $1 - 0.05 = 0.95$)

∴ عدد الثلاجات السليمة المتوقع إنتاجها في اليوم = $0.95 \times 400 = 380$ ثلاجة

3 ∵ احتمال الحصول على محصول جيد هو $\frac{4}{7}$، عدد الأفدنة المتوقع أن تنتج محصولًا جيدًا هو 32 فدانًا.

∴ قيمة $X = 56$ (لأن: $32 \div \frac{4}{7} = 32 \times \frac{7}{4} = 56$)

4 ∵ عدد البنات في العينة = 32 بنتًا. ∴ عدد الأولاد في العينة = 18 ولدًا. (لأن: $50 - 32 = 18$)

∴ عدد الأولاد المتوقع في المدرسة = $\frac{18}{50} \times 800 = 288$ ولدًا.

5 احتمال أن يكون الموظف المختار مهندسًا أو فنيًّا = $\frac{\text{عدد المهندسين + عدد الفنيين}}{\text{العدد الكلي للموظفين}} = \frac{10 + 6}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0.8$

سؤال 5

أكمل ما يأتي:

1 مصنع ينتج 600 جهاز حاسوب (تابلت) يوميًّا، فإذا كان احتمال أن يكون الجهاز معيبًا هو 0.02، فإن عدد الأجهزة السليمة المتوقع إنتاجها في اليوم هو ....

2 تتكون لجنة تحكيم من 30 عضوًا موزعين حسب التخصص كالتالي: 12 قاضيًا و10 محامين و8 مستشارين قانونيين، فإذا اختير عضو واحد عشوائيًّا من اللجنة ليكون متحدثًا باسمها، فإن احتمال أن يكون العضو المختار قاضيًا أو مستشارًا قانونيًّا يساوي ....

أسئلة الكتاب المدرسى

الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية:

1 قام أحد التلاميذ بإجراء استبيان على عينة مكونة من 25 تلميذًا من تلاميذ مدرسته لمعرفة أى الألعاب الرياضية يفضلون ممارستها، وسجل النتائج فى الجدول التالى:

اللعبة	كرة القدم	كرة السلة	الكرة الطائرة	المجموع
عدد التلاميذ	....	4	2	25

1 إذا اختير أحد تلاميذ المدرسة عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يفضل ممارسة كرة القدم.

2 أوجد العدد المتوقع للتلاميذ الذين يفضلون ممارسة كرة القدم من تلاميذ المدرسة البالغ عددهم 600 تلميذ.

2 عينة مكونة من 100 طالب للاستطلاع عن الألعاب الرياضية المفضلة من بين 900 طالب، كما هو مبين بالجدول المقابل:

اللعبة المفضلة	عدد الطلاب
كرة القدم	45
كرة السلة	30
التنس	15
كرة اليد	10

1 ما احتمال أن يكون الطالب من مفضلى كرة السلة؟

2 ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون كرة السلة من إجمالى الطلاب؟

3 ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون كرة القدم من إجمالى الطلاب؟

3 فريق كرة قدم يلعب 30 مباراة بالدورى العام، فإذا كان احتمال تعادله 0.3 واحتمال فوزه 0.6 ، فأوجد:

1 عدد المباريات المتوقع أن يتعادل فيها النادى.

2 عدد المباريات المتوقع أن يخسرها النادى.

4 فصل دراسى به بعض التلاميذ يرتدون نظارات، والبعض الآخر لا يرتدون نظارات، فإذا اختير تلميذ عشوائيًا من هذا الفصل وكان احتمال أن يكون هذا التلميذ يرتدى نظارة هو 0.1 ، فأوجد احتمال أن يكون هذا التلميذ لا يرتدى نظارة، وإذا كان عدد تلاميذ هذا الفصل 40 تلميذًا، فأوجد العدد المتوقع للتلاميذ الذين يرتدون نظارات.

5 مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية قام بسحب عينة عشوائية مكونة من 400 مصباح، فوجد أن المصابيح التالفة 12 مصباحًا.

1 أوجد احتمال أن يكون المصباح تالفًا.

2 أوجد احتمال أن يكون المصباح سليمًا.

3 إذا أنتج المصنع 1,000 مصباح فى يوم واحد، فكم يكون عدد المصابيح السليمة؟

6 تقوم شركة تأمين سيارات بدفع مبلغ 3,500 جنيه تعويضًا للسيارة التى تتعرض لحادث، فإذا كان احتمال إصابة السيارة هو 0.006 ، وكان عدد المشتركين فى هذه الوثيقة 9,000 مشترك، فما توقعك لما تتحمله الشركة من تعويضات؟

7 ينتج مصنع ملابس نوعين من القمصان لتعديل الإنتاج وفقًا لمتطلبات السوق، تم اختيار عينة عشوائية من مبيعات 5 منافذ لبيع الشركة حجم كل منها 100 قميص كما بالجدول التالى:

رقم المنفذ	1	2	3	4	5
مبيعات النوع الأول	39	82	34	22	53
مبيعات النوع الثانى	61	18	66	78	47

1 أى نوع هو الأكثر طلبًا؟ وبماذا تنصح الشركة؟

2 إذا كان الإنتاج الكلى لهذا المصنع 4,000 قميص، فما عدد القمصان المتوقع إنتاجها من النوع الأول؟

8 مصنعان لإنتاج التليفزيونات ينتجان كل يوم 210 تليفزيونات وبعض هذه التليفزيونات معيبة حسب الجدول المعطى:

	إنتاج المصنع الأول	إنتاج المصنع الثانى	المجموع
معيب	12	....	30
غير معيب	....	....	....
المجموع	100	....	210

أولًا: أكمل الجدول.

ثانيًا: إذا اختير عشوائيًّا أحد التليفزيونـــات، فاحسب احتمالات الأحـــداث الآتية:

1 A حدث (التليفزيون المختار معيب)

2 B حدث (التليفزيون المختار من إنتاج المصنع الثانى)

3 C حدث (التليفزيون المختار معيب ومن إنتاج المصنع الثانى)

4 D حدث (التليفزيون المختار معيب أو من إنتاج المصنع الثانى)

ثالثًا: إذا كان إنتاج المصنعين فى الشـــهر القادم ســـوف يصل إلى 7,000 تليفزيون، فما العدد المتوقع للتليفزيونات غير المعيبة فى ذلك الشهر وفقًا لهذه الدراسة؟

9 فصل دراسى به 36 تلميذًا، نجح منهم 27 تلميذًا فى الرياضيات و 12 تلميذًا فى اللغة العربية، و 9 تلاميذ فى الامتحانين معًا، فإذا اختير تلميذ عشوائيًّا:

أولًا: أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار:

1 ناجحًا فى الرياضيات.

2 ناجحًا فى اللغة العربية.

3 راسبًا فى اللغة العربية.

4 راسبًا فى الرياضيات واللغة العربية معًا.

ثانيًا: إذا كان العدد الكلى للمدرسة 540 تلميذًا، فما العدد المتوقع للتلاميذ الناجحين فى الرياضيات فقط؟

10 تم أخذ عينة عشوائية من 70 مهندسًا فى أحد المصانع لاستطلاع الرأى على السيارات الحديثة، 45 منهم يفضلون السيارات الألمانية الصنع، و25 منهم يفضلون الإيطالية الصنع، و10 منهم يفضلون النوعين معًا، فإذا اختيرت عينة عشوائية، فأوجـــد:

1 احتمال أن يكون المهندس المختار يفضل إحدى السيارتين على الأقل.

2 احتمال أن يكون المهندس المختار يفضل سيارة واحدة على الأكثر.

3 إذا كان العدد الكلى للمهندسين 2,100 مهندس ، فما العدد المتوقع للمهندسين الذين فضلوا السيارات الإيطالية الصنع؟

11 في يوم معين شاهد 60 طالبًا فى مدرسة ما فيديوهات على إحدى المنصات، 35 منهم شاهدوا فيديوهات تعليمية، 25 شاهدوا فيديوهات ترفيهية، 10 شاهدوا النوعين معًا،

1 **ما احتمال** أن يكون الطالب قد شاهد فيديو تعليميًا أو ترفيهيًا؟

2 وإذا كان العدد الكلى للمدرسة 2,400 طالب، **فما العدد المتوقع للطلبة الذين شاهدوا فيديوهات تعليمية؟**

12 **أكمل ما يأتى:**

1 فصل دراسى به 50 تلميذًا، اختير تلميذ عشوائيًا، فإذا كان احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتًا هو 0.6 ، فإن عدد الأولاد يساوى .... ولدًا.

2 مصنع ينتج 500 مروحة يوميًا، فإذا كان احتمال أن تكون المروحة معيبة 0.05 ، فإن عدد المراوح السليمة المتوقع إنتاجها فى اليوم هو .... مروحة.

3 فصل به 40 تلميذًا، منهم 20 يلعبون كرة القدم ، 10 يلعبون كرة السلة، 6 يلعبون كرة طائرة، فإذا اختير تلميذ عشوائيًا، فإن احتمال أن يكون التلميذ ممن لا يلعبون أيًا من الرياضات السابقة هو ....

4 إذا كان عدد الموظفين فى إحدى الشركات 36 موظفًا، وكان احتمال اختيار موظف عمره أقل من أو يساوى 40 عامًا هو $\frac{1}{6}$ ، فإن عدد الموظفين الذين تزيد أعمارهم على 40 عامًا = ... موظفًا.

5 من الجدول المقابل: يزداد إجمالى عدد عبوات اللبن المبيعة ليصل إلى 300 عبوة، فإن عدد العبوات المتوقع بيعها من عبوات اللبن خالى الدسم يساوى .... عبوة.

نوع اللبن	عدد العبوات المبيعة
كامل الدسم	50
خالى الدسم	30
نصف دسم	20

13 **اختر الإجابة الصحيحة:**

1 إذا كان احتمال فوز فريق كرة السلة فى مباراة واحدة هو 25%، **فكم** مباراة تتوقع أن يفوز بها من إجمالى 44 مباراة؟

(أ) 10 مباريات (ب) 20 مباراة (جـ) 12 مباراة (د) 11 مباراة

2 إذا كان عدد زوار أحد المعالم السياحية 24 زائرًا، منهم 16 أجنبيًا ، و8 مصريين، واختير أحد الزوار عشوائيًا، فما احتمال أن يكون الزائر مصريًا؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{7}$

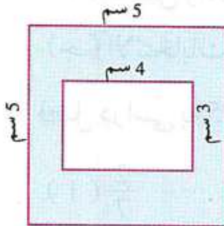
3 إذا كان احتمال الحصول على محصول أرز جيد فى إحدى القرى هو $\frac{3}{5}$ ، وقام الفلاحون بزراعة x فدان أرزًا وكان عدد الأفدنة المتوقع أن تنتج محصولًا جيدًا هو 30 فدانًا، فما قيمة x ؟

(أ) 18 (ب) 36 (جـ) 42 (د) 50

4 شركة بها 180 عاملًا وموظفًا، اختير منهم عينة عشوائية مكونة من 15 عاملًا وموظفًا، فوجد أن عدد العمال فى العينة 5 عمال ، فما العدد المتوقع للموظفين فى الشركة؟ ....

(أ) 120 (ب) 60

(جـ) 100 (د) 20



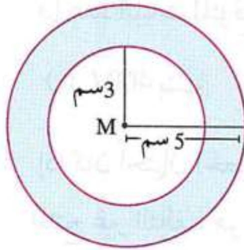
5 احتمال إصابة المنطقة المظللة فى الشكل المقابل هو ....

(أ) $\frac{12}{25}$ (ب) $\frac{11}{25}$

(جـ) 1 (د) $\frac{13}{25}$

---

14 إذا صوب شخص ما سهمًا على اللوحة وأصابها:



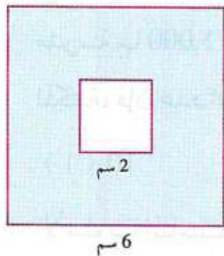
1 فما احتمال أن يصيب الشخص الجزء المظلل؟

2 إذا لعب 400 شخص هذه اللعبة،

فما العدد المتوقع للأشخاص الذين يستطيعون إصابة الجزء المظلل من اللوحة؟

---

15 أمامك لوحة على شكل مربعين، إذا صوب شخص ما سهمًا فأصاب هذه اللوحة:



1 فأوجد: احتمال إصابة المنطقة المظللة.

2 إذا صوب 90 شخصًا كل منهم سهمًا فأصاب اللوحة،

فما عدد المرات المتوقع لإصابة المنطقة المظللة؟

TIMSS تفكير إبداعى

16 الجدول التالى يوضح نتائج اختبار مصمم ليعطى نتائج إيجابية إذا كان المريض مصابًا بفيروس أو يعطى نتائج سلبية إذا كان المريض غير مصاب بالفيروس.

	نتيجة سلبية	نتيجة إيجابية	المجموع
المريض مصاب بالفيروس	14	....	200
المريض غير مصاب بالفيروس	....	46	....
المجموع	....	....	480

فأكمل الجدول السابق، ثم أوجد احتمال أن يعطى الاختبار نتائج خطأ.

1 اختر الإجابة الصحيحة:

1 يعتبر أسلوب الحصر الشامل غير مناسب لـ ....

(ا) فحص رمال الصحراء. (ب) تعدد السكان.

(جـ) الانتخابات. (د) فحص إنتاج مصنع.

2 فصل دراسى به 15 ولدًا و 20 بنتًا ، فإذا تغيب أحد التلاميذ، فإن احتمال أن يكون الغائب ولدًا يساوى ....

(ا) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{3}{7}$ (جـ) $\frac{4}{7}$ (د) $\frac{5}{7}$

3 يوجد فى مدرسة ما 1,000 تلميذ، اختير منهم عينة عشوائية مكونة من 90 تلميذًا، فوجد أن عدد البنات 45 بنتًا، فما عدد البنات المتوقع فى المدرسة؟ ....

(ا) 400 بنت (ب) 640 بنتًا (جـ) 500 بنت (د) 600 بنت

4 إذا كان احتمال الحصول على منتج غير تالف فى أحد المصانع هو $\frac{6}{7}$ ، وقام عمال المصنع بإنتاج x من المنتج، وكان عدد المنتج غير التالف هو 420 منتجًا، فما قيمة x ؟ ....

(ا) 50 (ب) 490 (جـ) 470 (د) 40

5 مدرسة بها 1,000 طالب وطالبة، منهم 400 ولد و600 بنت، تقرر أخذ عينة طبقية مناسبة حجمها 50 فردًا لتقييم خدمات المكتبة، فإن عدد البنين الذين يجب اختيارهم فى هذه العينة يساوى .... طالب.

(ا) 10 (ب) 15 (جـ) 20 (د) 30

6 الأسلوب المناسب لفحص نوع فصيلة الدم للمريض هو ....

(ا) الحصر الشامل. (ب) العينات. (جـ) الاستبيانات. (د) ليس شيئًا مما سبق.

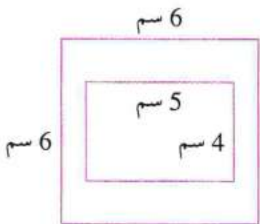
7 إذا كان احتمال إصابة شخص بمرض ما بين سكان قرية عددهم 2,000 شخص هو 0.03 ، فإن عدد الأشخاص المتوقع إصابتهم بهذا المرض فى القرية هو .... شخص.

(ا) 30 (ب) 300 (جـ) 60 (د) 600

8 إذا كان احتمال فوز فريق كرة السلة فى مباراة واحدة هو % 40، فكم مباراة تتوقع أن يفوز بها من إجمالى 20 مباراة؟ ....

(ا) 8 مباريات (ب) 10 مباريات (جـ) 12 مباراة (د) 16 مباراة

9 احتمال إصابة المنطقة المظللة فى الشكل المقابل هو ....



(ا) $\frac{5}{14}$ (ب) $\frac{2}{7}$

(جـ) 1 (د) $\frac{5}{9}$

2 أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان احتمال فوز فريق فى أى مباراة هو 0.7 ، **فكم** مباراة يتوقع أن يفوز بها من إجمالى 40 مباراة؟

2 مدرسة بها 50 معلمًا ، و 200 طالب، أخذت عينة طبقية حجمها 35 فردًا تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها، **فما** عدد الطلاب فى هذه العينة؟

3 عينة عشوائية من فصل يتكون من 36 ولدًا، منهم 6 أولاد يرتدون نظارات، فإذا اختير عشوائيًّا ولد من الفصل، **فأوجد** احتمال أن يكون هذا الولد لا يرتدى نظارة.

4 اختيرت عينة عشوائية مكونة من 60 شخصًا من المتقدمين لاختبار إحدى الوظائف، فوجد أن 45 شخص يجيدون الإنجليزية، و 30 شخصًا يجيدون الفرنسية، و 25 شخصًا يجيدون اللغتين معًا، **فما احتمال** أن يُختار شخص يجيد أيًّا من اللغتين؟ وإذا كان العدد الكلى للمتقدمين للاختبار 2,400 شخص، **فما العدد** المتوقع للأشخاص الذين يجيدون اللغة الإنجليزية فقط؟

5 مصنع لإنتاج الغسالات ينتج ثلاثة موديلات، وأعدادها كالتالى 800 من الموديل الأول، 900 من الموديل الثانى، 500 من الموديل الثالث، فإذا أراد مدير المصنع أخذ عينة عشوائية تقدر بـ 20% من الإجمالى ويمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه، **فحدد عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

6 من الجدول المقابل: يزداد إجمالى عدد العبوات المبيعة ليصل إلى 500 عبوة، **فما عدد العبوات المتوقع بيعها من عبوات كامل الدسم.**

نوع اللبن	عدد العبوات المبيعة
كامل الدسم	60
خالى الدسم	35
نصف دسم	5

7 عند أخذ عينة مكونة من 20 طالبًا من بين 800 طالب فى إحدى المدارس وسؤالهم عن المادة المفضلة لديهم، **كانت إجاباتهم كما بالجدول المقابل:**

المادة الدراسية	التكرار
العلوم	4
اللغة العربية	8
الرياضيات	6
الدراسات	2

1 **إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الطالب من مفضلى مادة الرياضيات؟**

2 **ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة الرياضيات بالمدرسة؟**

3 **ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون مادة العلوم بالمدرسة؟**

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 مصنع به 320 عاملًا ومهندسًا، اختيرت منهم عينة عشوائية مكونة من 16 عاملًا ومهندسًا، فوجد أن عدد المهندسين بالعينة 5 مهندسين، فما عدد المهندسين المتوقع فى المصنع؟ .... مهندس.

(ا) 50 (ب) 100

(جـ) 160 (د) 220

2 أى مما يأتى من المصادر الثانوية لجمع البيانات؟ ....

(ا) المقابلة الشخصية (ب) الاستبيانات

(جـ) قاعدة بيانات الموظفين (د) الملاحظة والقياس

3 إذا كان احتمال تسجيل هدف من رمية جزاء فى مباراة لكرة اليد هو 60 % ، فما عدد الأهداف المتوقع تسجيلها عند رمى 30 رمية؟ .... أهداف.

(ا) 9 (ب) 12

(جـ) 18 (د) 30

4 إلى أى مما يأتى يعتبر أسلوب الحصر الشامل مناسبًا؟ ....

(ا) بحث مكونات رمال الصحراء.

(ب) فحص نسبة العذوبة لمياه إحدى الآبار.

(جـ) بحث نسبة وجود أحد المعادن فى مناطق التعدين.

(د) معرفة عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة النهائية فى امتحان الرياضيات بالفصل.

2 أكمل كلًّا مما يأتى:

1 مصنع ينتج 120 غسالة يوميًّا، فإذا كان احتمال أن تكون الغسالة معيبة هو 0.05 ، فإن عدد الغسالات السليمة المتوقع إنتاجها فى اليوم هو .... غسالة.

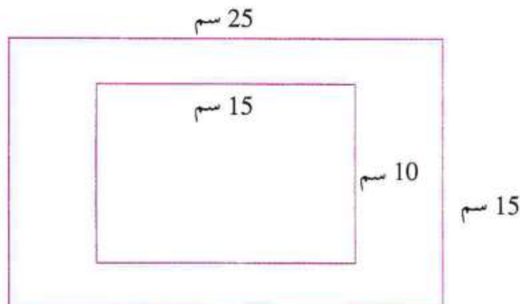
2 إذا كان الفريق المعالج فى أحد المستشفيات مكونًا من 60 ممرضًا، و 12 طبيبًا، فإذا اختير أحد أعضاء الفريق عشوائيًّا، فإن احتمال أن يكون ممرضًا يساوى ....

3 من أساليب جمع البيانات .... و ....

4 فى الشكل المقابل:

إذا صوب شخص على اللوحة المقابلة،

فإن احتمال إصابة المنطقة المظللة يساوى ....



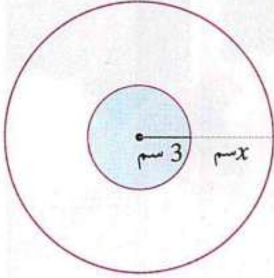
3 **أجب عن الأسئلة الآتية:**

1 عينة عشوائية تتكون من 50 طالبًا، شملهم استطلاع للرأى، وجد أن 25 طالبًا منهم يفضلون مادة اللغة العربية، 20 طالبًا يفضلون العلوم، 15 طالبًا يفضلون اللغة العربية والعلوم معًا، فإذا اختير طالب عشوائيًّا، **فأوجد احتمال** أن يكون الطالب المختار يفضل إحدى المادتين على الأقل، وإذا كان العدد الكلى للمدرسة 750 طالبًا، **فما العدد** المتوقع للطلبة الذين يفضلون مادة العلوم فقط فى المدرسة؟

2 فى الشكل المقابل:

إذا كان احتمال إصابة المنطقة المظللة يساوى $\frac{1}{9}$ ،

فما قيمة x ؟ ....



3 عينة عشوائية من مدرسة تتكون من 24 ولدًا و 16 بنتًا، منهم 9 أولاد ، 4 بنات يلبسون نظارة، فإذا اختير عشوائيًّا شخص من هذه المدرسة، **فأوجد احتمال** أن يكون هذا الشخص ولدًا لا يلبس نظارة، وإذا كان العدد الكلى فى المدرسة 440 طالبًا، **فأوجد العدد** المتوقع للأولاد الذين لا يلبسون نظارة فى المدرسة.

4 أحد مصانع السيارات يقوم بإنتاج 3 موديلات من السيارات فى العام، وتعدادها هو 500 سيارة من الموديل الأول، و 700 من الموديل الثانى، و 300 من الموديل الثالث. إذا أرادت إدارة المصنع أخذ عينة تقدر بـ 7% من الإنتاج الإجمالى لها يمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه، **فأوجد** عدد مفردات كل موديل فى العينة.

المعلومات الإثرائية وأنشطة الوحدات





معلومـة إثرائيـة

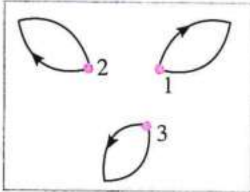
خواص بعض العلاقات:

◄ **العلاقة على مجموعة يمكن أن تتصف بخواص معينة نذكر منها ما يلى:**

1 العلاقـات الانعكاسية:

• **تعريف:** يقال للعلاقة R المعرفة على المجموعة X إنها **علاقة انعكاسية** إذا تحقق الشرط الآتى:

إذا كان: $a\ R\ a$ لكل $a \in X$



• **أمثلـة للعلاقات الانعكاسية:**

1 علاقـة «التساوى».

2 علاقـة «الاحتواء».

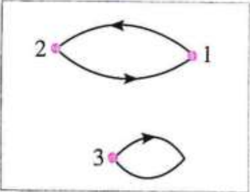
3 علاقـة «يقسم».

4 علاقـة «التوازى على مجموعة المستقيمات الواقعة فى مستوى واحد».

2 العلاقـات المتماثلـة:

• **تعريف:** يقال للعلاقة R المعرفة على المجموعة X إنها **علاقة متماثلـة** إذا تحقق الشرط الآتى:

لكل: $a \in X\ ,\ b \in X$ إذا كان: $a\ R\ b$ فـإن: $b\ R\ a$



• **أمثلـة للعلاقات المتماثلـة:**

1 علاقـة «التساوى».

2 علاقـة «عمود على» المعرفة على مجموعة المستقيمات الواقعة فى مستوى واحد.

• **أمثلـة للعلاقات غير المتماثلة:**

1 علاقـة «أكبر من».

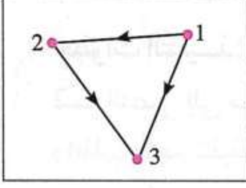
2 علاقـة «أصغر من».

3 علاقـة «يقسم».

3 العلاقات المتعدية أو الناقلة:

- **تعريف:** يقال للعلاقة R المعرفة على المجموعة X إنها **علاقة متعدية** إذا تحقق الشرط الآتى:

لكل: $a \in X , b \in X , c \in X$ ◂ إذا كان: $a R b , b R c$ ◂ فإن: $a R c$



- **أمثلة للعلاقات المتعدية:**

1 علاقة «التساوى». 2 علاقة «أكبر من».
3 علاقة «أصغر من». 4 علاقة «يقسم».

نشاط الوحدة الأولى 1 التناسب فى حياتنا



- **الهدف من النشاط:**

امتلاك مهارة توظيف مفهوم التناسب فى المواقف الحياتية.

- **خطوات التنفيذ:**

قسِّم الفصل إلى مجموعات، كل مجموعة مكونة من 3 طلاب، واطلب منهم تنفيذ الخطوات التالية:

1 كل مجموعة تستخدم الجدول المقابل، وتقترح أسماء للأصناف وبالتالى تحديد الموقف الذى تعبر عنه بيانات هذا الجدول.

2 البحث عن القيم المجهولة فى الجدول، ثم إيجاد القيم المناسبة والصحيحة لها لتكون الكميات متناسبة للأصناف المختلفة.

	الكمية / العدد	السعر / التكلفة
الصنف الأول	4	40
الصنف الثانى	....	60
الصنف الثالث	5	....

3 إذا كان هناك صنف رابع وكانت الكمية 15 والسعر 70 ، فهل يعتبر هذا الصنف متناسبًا مع الأصناف الثلاثة الأولى؟

4 توضيح خطوات الإجابة عن الأسئلة السابقة مع تفسير مدى صحة النتائج التى تم التوصل إليها.

نشاط الوحدة الثانية 2 جدول الحصص والأزواج المرتبة



- **الهدف من النشاط:**

توظيف مفهوم الأزواج المرتبة فى تنظيم عناصر وبيانات خاصة بالمواقف الحياتية.

- **خطوات التنفيذ:**

بالاستعانة بما تم تعلمه عن مفهوم الأزواج المرتبة نفذ الخطوات التالية، ثم قارن إجابتك بما توصل إليه أحد زملائك.

1 باستخدام جدول الحصص الأسبوعى عبِّر عما يلى باستخدام الأزواج المرتبة.

- أزواج مرتبة تعبر عن (اليوم ، اسم المادة الدراسية)
- أزواج مرتبة تعبر عن (اليوم ، حصة الرياضيات)

2 كوِّن قائمة بالأزواج المرتبة لأى مادة دراسية أخرى تختارها.

3 قارن إجابتك فى الخطوة (1) مع إجابة أحد زملائك، وحدد مدى التشابه والاختلاف، مع التصحيح.

4 اختر أحد المواقف الحياتية خارج المدرسة التى يمكن أن تعبر عن بياناتها بالأزواج المرتبة مثل: أفراد العائلة (الاسم والعمر) ، السوق (الصنف والسعر) .

نشاط الوحدة الثالثة 3 الدائرة فى حياتنا



- **الهدف من النشاط:**

توظيف مفاهيم ومهارات الهندسة فى المواقف الحياتية.

- **خطوات التنفيذ:**

قسّم الفصل إلى مجموعات، كل مجموعة مكونة من (4 - 5) طلاب، واطلب منهم تنفيذ الخطوات الموضحة:

1 تحديد عدد (3) من الأشكال الهندسية والمجسمات المحيطة بهم، مثل: (ساعة حائط - طبق - ...) والتى تحتوى على نماذج لدائرة.

2 تحديد الوسيلة المناسبة وفقًا لهذا الشكل/ المجسم لقياس طول نصف القطر أو طول القطر.

3 حساب محيط ومساحة الدائرة فى كل شكل/ مجسم.

4 استكمال الجدول التالى:

اسم الشكل	وسيلة القياس	طول القطر أو نصف القطر	قيمة المحيط	قيمة المساحة
.1				
.2				
.3				

نشاط الوحدة الرابعة 4 قائمة التنبؤات أو الأنشطة المستقبلية



- **الهدف من النشاط:**

امتلاك مهارة توظيف مفاهيم الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية فى المواقف الحياتية.

- **خطوات التنفيذ:**

قسّم الفصل إلى مجموعات، كل مجموعة مكونة من (4 - 5) طلاب، واطلب منهم دراسة الموقف التالى، ثم تنفيذ الخطوات الموضحة:

◂ ترغب المدرسة فى تنفيذ أحد الأنشطة التالية، وتبحث عن مساعدة لتوقع الاختيار المستقبلى الأفضل بالنسبة للطلاب:

- أنشطة رياضية (كرة سلة - كرة قدم - كرة طائرة).
- عقد مسابقات (ثقافية - علمية - رياضية).
- تنظيم رحلات (مكتبة الإسكندرية - المتحف المصرى الكبير - العاصمة الإدارية).

- **مهام الطلاب:**

1 على كل مجموعة أن تختار موضوعًا واحدًا فقط من الموضوعات الثلاث السابقة.

2 تحديد أسلوب جمع البيانات المناسب عن هذا الموضوع.

3 إعداد الأداة المناسبة لجمع البيانات، وتحديد العينة التى سيتم التطبيق عليها.

4 استخدام الأداة والبدء فى جمع البيانات وتنظيمها.

5 ترجمة البيانات إلى أحد التمثيلات البيانية التى تم تعلمها من قبل.

6 تقديم التوصية المناسبة للمدرسة فى ضوء التنبؤ الذى تم الوصول إليه من تلك النتائج.



المراجعة النهائية والامتحانات

ملخص عام على الوحدات

الوحدة الأولى الأعداد والعمليات عليها

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر.

إذا كان: الكميات a , b , c , d كميات متناسبة.

فإن: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن: الكميات a , b , c , d كميات متناسبة.

حيث أن: a يُسمى بالأول المتناسب، b يُسمى بالثانى المتناسب، c يُسمى بالثالث المتناسب، d يُسمى بالرابع المتناسب.

فمثلًا: إذا كانت الأعداد: $18 , 12 , 6 , 4$ **متناسبة**

فإن: $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$

نقاط هامة

الضرب التبادلى:

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن: $a \times d = b \times c$

أى أن: **حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين**

فمثلًا: إذا كان: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ فإن: $15 \times 4 = 20 \times 3$

- إذا كان: $a \times d = b \times c$ فإن: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فمثلًا: إذا كان: $4\,b = 3\,a$ فإن: $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ حيث k ثابت لا يساوى الصفر، ويُسمى **(ثابت التناسب)**

فإن: $a = bk \quad , \quad c = dk$

إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

خاصيــة (1)

فإن: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

خاصيــة (2)

فإن: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ ، $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

خاصية (3) إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots = k$ فإن:

1 $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots} = k$

أى أن: إحدى النسب = $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$

2 $\frac{am+cn+e\ell+\cdots}{bm+dn+f\ell+\cdots} = k$

حيث $m , n , \ell , \cdots$ أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

فمثلًا: إذا كان: $\frac{a}{8} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{5a-b+4c}{8x}$ **فأوجد قيمة** x

- بضرب حدى النسبة الأولى × (5) ، وبضرب حدى النسبة الثانية × (1−) ، وبضرب حدى النسبة الثالثة × (4) ، ثم بجمع المقدمات وجمع التوالى للنسب الثلاث:

$\therefore$ إحدى النسب = $\frac{5a-b+4c}{5(8)+(-1)\times(4)+4(5)}$

$\therefore \frac{5a-b+4c}{56} = \frac{5a-b+4c}{8x}$ $\qquad \therefore 8x = 56$ $\qquad \therefore x = 7$

التناسب المتسلسل

- إذا كانت: a , b , c كميات متناسبة، فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، **ويسمى هذا التناسب بالتناسب المتسلسل.**

– يُسمى a بالأول المتناسب – يُسمى b بالوسط المتناسب بين a , c أو الوسط الهندسى بين a , c

الوسط المتناسب:

- إذا كان: b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ومن الضرب التبادلى يكون: $b = \pm\sqrt{ac} \iff b^2 = ac$

فمثلًا: الأعـداد 48 , 12 , 3 **فى تناسب متسلسل**

لأن: $\frac{12}{48} = \frac{3}{12}$ (حيث كل من النسبتين تساوى $\frac{1}{4}$) ، $(12)^2 = 3 \times 48$

نقاط هامة

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

حيث k ثابت لا يساوى الصفر، فإن:

① $b = ck$ ② $a = bk = (ck)k = ck^2$

- إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

حيث k ثابت لا يساوى الصفر، فإن:

① $c = dk$ ② $b = ck = (dk)k$ $\quad \therefore b = dk^2$ ③ $a = bk = (dk^2)k$ $\quad \therefore a = dk^3$

تعميم التناسب المتسلسل:

- يقال إن الكميات a , b , c , d .... فى تناسب متسلسل

إذا كان: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots\dots$ ويكـون:

- b وسطًا متناسبًا بين a , c
- c وسطًا متناسبًا بين b , d ، وهكذا ...

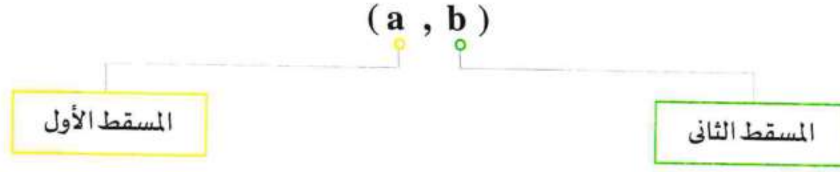
فمثلًا: الأعـداد 54 , 18 , 6 , 2 **فى تناسب متسلسل**

لأن: $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18}$ نلاحظ أن:

- 18 وسط متناسب بين 6 , 54
- 6 وسط متناسب بين 2 , 18

الزوج المرتب

(a, b) يُسمى زوجًا مرتبًا



تساوى زوجين مرتبين:

إذا كان: $(x, y) = (a, b)$ ◄ فإن: $y = b$ ، $x = a$

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين:

إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين فإن:

1 $X \times Y = \{(a, b) : a \in X \ , \ b \in Y\}$

2 $Y \times X = \{(c, d) : c \in Y \ , \ d \in X\}$

3 $X \times X = X^2 = \{(a, b) : a \in X \ , \ b \in X\}$

لاحظ أن

- $X \times Y \neq Y \times X$ إلا إذا كانت $X = Y$
- $X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$ حيث $\varnothing$ المجموعة الخالية
- إذا رمزنا لعدد عناصر $X \times Y$ بالرمز $n(X \times Y)$ فإن:

$$n(X \times Y) = n(Y \times X) = n(X) \times n(Y) \quad ، \quad n(X^2) = [n(X)]^2$$

- يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى بمخطط سهمى أو بمخطط ديكارتى.

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين:

- فى المجموعات غير المنتهية مثل: N ، Z ، Q ، R يكون حاصل الضرب الديكارتى لهذه المجموعات مجموعة من الأزواج المرتبة غير المنتهية أيضًا.

1 $N \times N = N^2 = \{(a, b) : a \in N \ , \ b \in N\}$

2 $Z \times Z = Z^2 = \{(a, b) : a \in Z \ , \ b \in Z\}$

3 $Q \times Q = Q^2 = \{(a, b) : a \in Q \ , \ b \in Q\}$

4 $R \times R = R^2 = \{(a, b) : a \in R \ , \ b \in R\}$

العلاقــة:

- إذا كانت X ، Y مجموعتين غير خاليتين

يقال أن R علاقة من X إلى Y إذا وفقط إذا كانت R مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى X × Y

أى أن: $R \subset X \times Y$

- مجال R = $\{a : (a , b) \in R\}$ • مــدى R = $\{b : (a , b) \in R\}$

$$(a , b) \in R \Longleftrightarrow a\,R\,b$$

- **يمكن تمثيل العلاقة بإحدى الطرق الآتية:**

1 مجموعة من الأزواج المرتبة وتسمى بيان العلاقة. 2 جدول العلاقة.

3 المخطط السهمى للعلاقة. 4 التمثيل البيانى للعلاقة.

الــدالــة:

- لأى مجموعتين غير خاليتين X ، Y

يقال للعلاقة من X إلى Y أنها دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر X بعنصر واحد فقط من عناصر Y

- المجموعة X = مجال الدالة • المجموعة Y = المجال المقابل للدالة
- مجموعة العناصر التى تمثل صور لعناصر المجموعة X تحت تأثير قاعدة الدالة = مدى الدالة وهى مجموعة جزئية من Y
- كل دالة هى علاقة ولكن كل علاقة ليست بالضرورة أن تكون دالة.
- قاعدة الدالة هى التى تعين لكل عنصر فى مجال الدالة صورة فى المجال المقابل للدالة، وإذا رمزنا للدالة بالرمز f فإن: $y = f(x)$ هى قاعدة الدالة.
- الدالة f من المجموعة X إلى المجموعة Y تكتب رياضيًّا:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{حيث} \quad f(x) = y$$

الدالة الخطية:

- الدالــة f حيث $f(x) = ax + b$ ، a , b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$ تسمى **دالة خطيــة.**

وهى تُمَثَّل بيانيًّا بخط مستقيم يقطع محور X فى النقطة $\left(\frac{-b}{a} , 0\right)$ ويقطع محور Y فى النقطة $(0 , b)$

وهى من الدرجة الأولى.

- إذا كان: $b = 0$ ، $a \neq 0$ فإن الدالــة f حيث $f(x) = ax$

يمثِّلها بيانيًّا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل $(0\ ,\ 0)$

الدالة الثابتـة:

- الدالـة f حيث $f(x) = b$ ، b عدد حقيقى لا يساوى صفر تسمى **بالدالة الثابتـة.**
وهى تمثل بخط مستقيم يوازى محور X ويقطع محور Y فى النقطة $(0 , b)$
المدى = $\{b\}$ وهى من الدرجة الصفرية

- **الدالـة الصفرية**
الدالة f حيث $f(x) = 0$ تمثل بيانيًا بمحور X نفسـه، المدى = $\{0\}$
وهى غير معرفة الدرجة وهى **المحايد الجمعى لعملية جمع الدوال.**

معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

- الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد هى: $ax + b = 0$
حيث a ، b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$

- **معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد: يكون فيها المتغير الوحيد مرفوعًا للأس واحد.**

خواص علاقة التساوى:

- **إذا كانت a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية ، a = b فإن:**

1 $a + c = b + c$
2 $a - c = b - c$
3 $a \times c = b \times c$
4 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ حيث $c \neq 0$

متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

تأخذ أحدى الصور الآتية:

$ax + b < 0$ أو $ax + b > 0$ أو $ax + b \leqslant 0$ أو $ax + b \geqslant 0$

حيث a ، b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$

خواص علاقة التباين:

- **إذا كانت a , b , c ثلاثة أعداد حقيقية ، a < b فإن:**

1 $a + c < b + c$
2 $a - c < b - c$
3 $a \times c < b \times c$ إذا كانت c موجبة
$a \times c > b \times c$ إذا كانت c سالبة
4 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ إذا كانت c موجبة
$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ إذا كانت c سالبة

المتباينة المركبة:

- المتباينة $a < x < b$ تسمى متباينة مركبة ويمكن تقسيمها إلى متباينتين $x > a$ ، $x < b$
وتكون مجموعة الحل هى تقاطع مجموعتى حل هاتين المتباينتين.

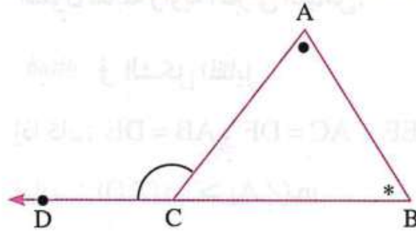
مسلمات التباين:

1 الإضافـة	إذا كان: a < b ، فإن: a + c < b + c	فمثلًا إذا كان: 8 > 5 ، فإن: 4 + 8 > 4 + 5
2 الطـرح	إذا كان: a < b ، فإن: a − c < b − c	فمثلًا إذا كان: 7 > 6 ، فإن: 2 − 7 > 2 − 6
3 الضرب فى عدد موجـب	إذا كان: a < b ، c عددًا موجبًا فإن: a × c < b × c	فمثلًا إذا كان: 7 > 5 ، فإن: 3 × 7 > 3 × 5
4 علاقـة التبـاين ناقـلة	إذا كان: a < b ، b < c فإن: a < c	فمثلًا إذا كان: 7 > 5 ، 5 > 3 فإن: 7 > 3
5 المجمـوع	إذا كان: a < b ، c < d فإن: a + c < b + d	فمثلًا إذا كان: 7 > 5 ، 4 > 3 فإن: 7 + 4 > 5 + 3
6 المقارنة بين الكل والجزء	إذا كان: a = b + c حيث c عدد موجب فإن: a > b	فمثلًا إذا كان: 7 + 3 = 10 فإن: 7 < 10 ، 3 < 10

نقاط هامة

- قياس الزاوية الخارجة عن المثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها.

$m(\angle ACD) > m(\angle A)$, $m(\angle ACD) > m(\angle B)$



تذكـر أن

1 مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث (متباينة المثلث).

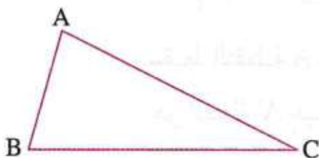
2 طول أى ضلع فى المثلث أكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعها.

نظرية:

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.

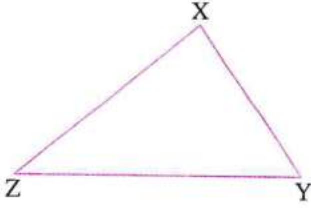
إذا كان: $AC > AB$

فـإن : $m(\angle B) > m(\angle C)$



عكس النظرية:

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الأخرى.



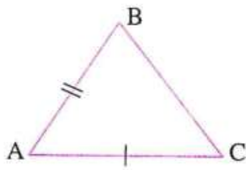
فى Δ XYZ المقابل:

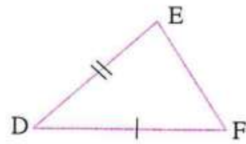
إذا كان: $m(\angle Y) > m(\angle Z)$

فإن: $XZ > XY$

نظرية:

إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف قياسا الزاويتين المحصورتين بين الضلعين فى كل منهما؛ فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول.





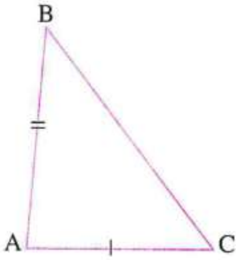
فمثلًا:

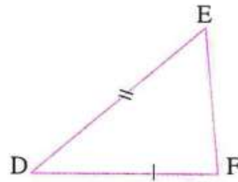
إذا كان: $AB = DE$ ، $AC = DF$ ، $m(\angle A) > m(\angle D)$

فـإن : $BC > EF$

عكس النظرية:

إذا ساوى فى الطول ضلعان فى مثلث نظيريهما فى مثلث آخر، واختلف فى الطول الضلع الثالث فى كل منهما، فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس.





فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: $AB = DE$ ، $AC = DF$ ، $BC > EF$

فـإن : $m(\angle A) > m(\angle D)$

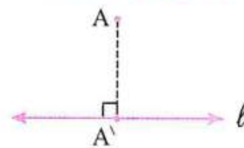
المساقط العمودية:

أولًا مسقط نقطة على مستقيم:

مسقط نقطة على مستقيم هى نقطة تمثل موقع العمود الساقط من النقطة على هذا المستقيم.

فمثلًا: يمكن إيجاد مسقط النقطة A على المستقيم ℓ كما يلى:

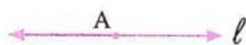
إذا كانـت $A \notin \ell$



مسقـط النقطـة A على المستقيم ℓ

هو النقطة A\ حيث $\overline{AA\backslash} \perp \ell$

إذا كانـت $A \in \ell$



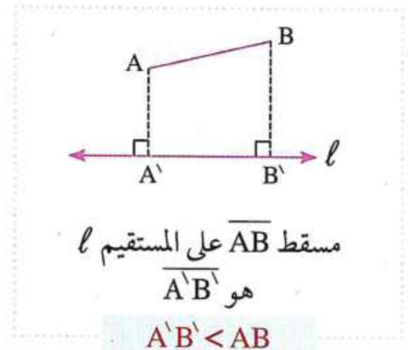
مسقـط النقطـة A على المستقيم ℓ

هو النقطة A نفسها

ثانيًا | مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم:

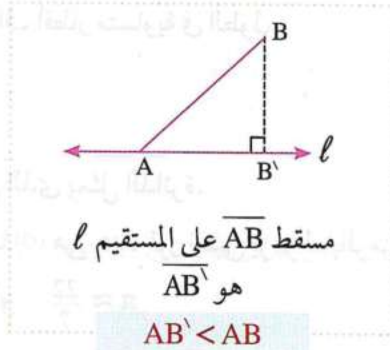
مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو القطعة المستقيمة التى طرفاها هما مسقطا طرفى القطعة المستقيمة الأصلية على هذا المستقيم.

فمثلًا: يمكن إيجاد مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ كما يلى:



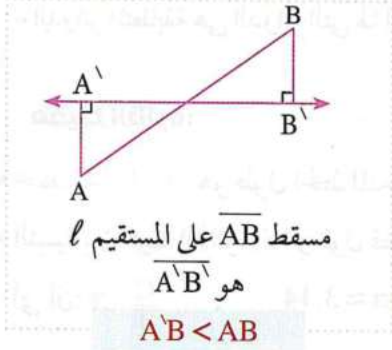
مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B'}$

$A'B' < AB$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{AB'}$

$AB' < AB$



مسقط $\overline{AB}$ على المستقيم ℓ هو $\overline{A'B'}$

$A'B < AB$

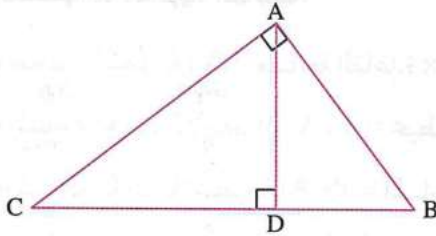
نظرية إقليدس:

مســاحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية تســاوى مساحة المستطيل الذى بعداه طول مسقط هذا الضلع على الوتر، وطول الوتر.

فى الشكل المقابل:

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$ بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

فإن:

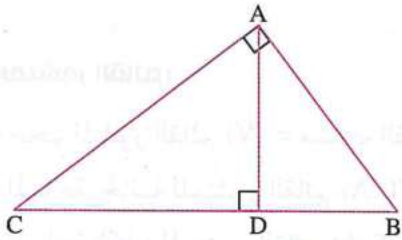


- $(AC)^2 = CD \times CB$
- $(AB)^2 = BD \times BC$

نتيجة

إذا كان: ABC مثلثًا قائم الزاوية فى A ، $D \in \overline{BC}$ ،

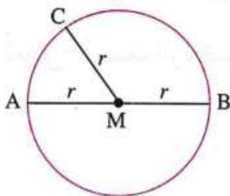
بحيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، فإن:



1. $(AD)^2 = DB \times DC$
2. $AB \times AC = BC \times AD$ ومنها $AD = \frac{AB \times AC}{BC}$

مفهوم الدائرة:

- الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.
- النقطة الثابتة تسمى "مركز الدائرة" ويرمز لها بأحد الحروف مثل الحرف M.
- البعد الثابت يسمى طول نصف قطر الدائرة، ويرمز له بالحرف r.
- تسمى الدائرة عادة بمركزها فنقول الدائرة M لنعنى الدائرة التى مركزها M.
- نصف قطر الدائرة هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أى نقطة عليها.

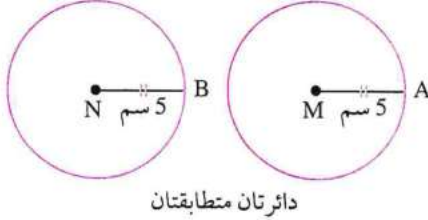


مثل كل من: $\overline{MA}$ ، $\overline{MB}$ ، $\overline{MC}$ فى الشكل المقابل حيث: $MA = MB = MC = r$

- قطر الدائرة هو قطعة مستقيمة طرفاها أى نقطتين على الدائرة وتمر بمركزها.

مثل: $\overline{AB}$ قطر فى الدائرة M ويرمز لطول قطر الدائرة بالرمز d ويكون $d = 2r$

نقاط هامة



دائرتان متطابقتان

- يمكن رسم دائرة إذا علم طول قطرها (d) وذلك بحساب طول نصف قطرها (r)

باستخدام العلاقة: $r = \frac{d}{2}$

- الدوائر المتطابقة هى الدوائر التى لها أنصاف أقطار متساوية فى الطول.

محيط الدائرة:

- محيط الدائرة (C): هو طول الخط المنحنى الذى يمثل الدائرة.
- النسبة بين محيط الدائرة (C) وطول قطرها (d) هى عدد غير نسبى يرمز له بالرمز π

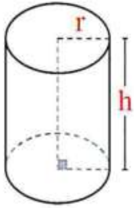
أى أن: $\frac{C}{d} = \pi$ ، $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$

مساحة الدائرة:

- مساحة الدائرة (A): تساوى حاصل ضرب مربع طول نصف القطر فى النسبة التقريبية (π).

$$A = \pi r^2$$

الأسطوانة الدائرية القائمة:



- حجم الأسطوانة (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع، أى أن: $V = \pi r^2 h$
- المساحة الجانبية للأسطوانة (L.A) = محيط القاعدة × الارتفاع، أى أن: $L.A = 2\pi rh$
- المساحة الكلية للأسطوانة (S.A) = المساحة الجانبية للأسطوانة + ضعف مساحة القاعدة

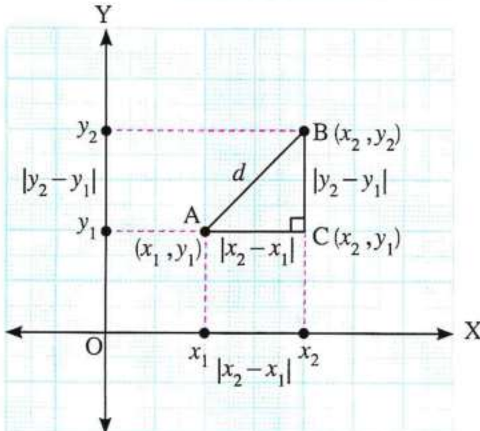
أى أن : $S.A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$

ويطلق على المساحة الكلية أحيانًا المساحة السطحية.

المنشور القائم:

- حجم المنشور القائم (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع.
- المساحة الجانبية للمنشور القائم (L.A) = محيط القاعدة × الارتفاع
- المساحة الكلية للمنشور القائم (S.A) = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة
- حجم مجسم مركب من مجسمين يساوى مجموع حجمى المجسمين الذين يكونانه.

البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى:



على المستوى الإحداثى المقابل:

بفرض أن: $A (x_1 , y_1)$, $B (x_2 , y_2)$ والمسافة بينهما d

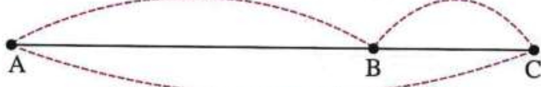
المسافة (d) بين النقطتين $A (x_1 , y_1)$, $B (x_2 , y_2)$

تُعطى بالصيغة الرياضية: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



نقاط هامة

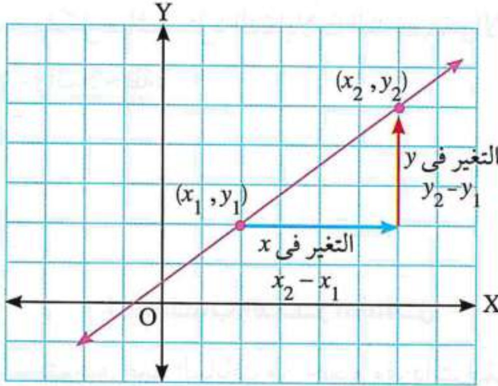
- لأى ثلاث نقاط C , B , A، إذا كان طول $\overline{AC}$ أكبر من طول كل من $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ فإن:



1 النقط C , B , A تقع على استقامة واحدة،
إذا كان: $AB + BC = AC$

2 النقط C , B , A هى رءوس مثلث، إذا كان: $AB + BC > AC$ من متباينة المثلث

ميل الخط المستقيم:



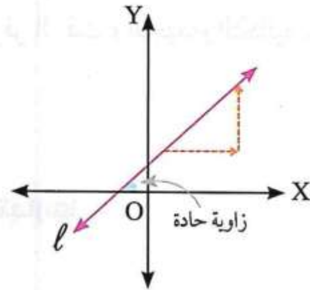
ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين:

(x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) فى النظام الإحداثى يعطى بالعلاقة:

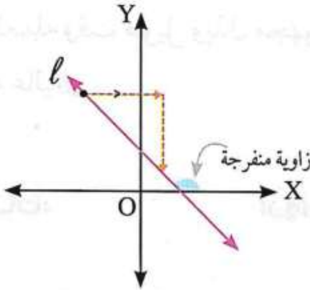
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{أو} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حالات ميل الخط المستقيم:

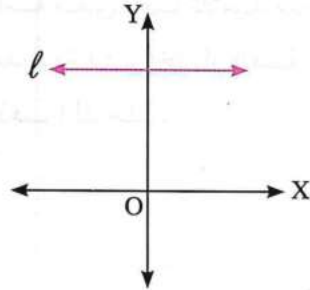
1 الميل الموجب:



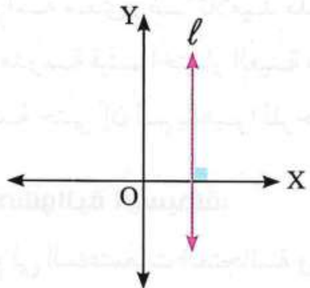
2 الميل السالب:



3 الميل يساوى الصفر:



4 الميل غير معرف:



لاحظ أن

- بفرض أن: C , B , A ثلاث نقاط، وكان ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$ ، B نقطة مشتركة.
  - (1) إذا كان: $m_1 = m_2$ فإن النقاط C , B , A تقع على استقامة واحدة.
  - (2) إذا كان: $m_1 \neq m_2$ فإن النقاط C , B , A ليست على استقامة واحدة.
- إذا كان: C , B , A ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، فإن: ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = ميل $\overleftrightarrow{BC}$ = ميل $\overleftrightarrow{AC}$

الوحدة الرابعة الإحصاء والاحتمال

أولًا جمع البيانات: يتم جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها، وذلك للأستفادة منها فى اتخاذ قرارات صحيحة.

مصادر جمع البيانات

1 مصادر أولية:

- ونحصل منها على البيانات بشكل مباشر مثل: المقابلات الشخصية والاستبيانات والملاحظة.

2 مصادر ثانوية:

- ونحصل منها على البيانات قد تم تجميعها من قبل عن طريق هيئات ومؤسسات مثل: نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء والإنترنت وقاعدة بيانات الموظفين.. وغيرها.

أساليب جمع البيانات

1 أسلوب الحصر الشامل

- يتم فيه جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع الإحصائى ويتطلب استخدامه فى حالات مثل: (ا) التعداد العام للسكان (ب) الانتخابات.
- يتميز بدقة النتائج والشمول وعدم التحيز.
- يحتاج لعمله وقت طويل وبذل مجهود كبير وتكلفه عالية.

2 أسلوب العينات

- يتم فيه جمع البيانات من عينه ممثله للمجتمع تم تعمم النتائج على المجتمع كله ويتطلب استخدامه فى حالات مثل: أخذ عينه من دم مريض لإجراء فحوصات أو أخذ عينه من منتجات مصنع لبحث مطابقتها للمواصفات.
- يتميز بأنه يوفر الوقت والجهد والتكاليف ولكن نتائجه غير دقيقة.

ثانيًا العينات: أنواع العينات حسب طريقة اختيارها

عينة غير عشوائية (اختيار متحيز)

فمثلًا: عند دراسة مدى رضا تلاميذ مدرسة ما عن رحلة مدرسة فيتم اختيار العينة من كل تلاميذ المدرسة حتى إن لم يذهبوا للرحلة.

عينة عشوائية (اختيار عشوائى)

فمثلًا: عند دراسة مدى رضا تلاميذ مدرسة ما عن رحلة مدرسة فيتم اختيار العينة من التلاميذ الذين ذهبوا للرحلة.

1 العينة العشوائية البسيطة:

وتستخدم فى المجتمعات المتجانسة ويتم اختيارها بطريقتين:

(ا) **الطريقة الأولى:** [إذا كان حجم المجتمع صغيرًا].

وهذه الطريقة تعتبر مناسبة لاختيار عينة مكون 5 تلاميذ من فصل به 45 تلميذًا حيث يتم تحضير بطاقة لكل مفرده من مفردات المجتمع وتكون البطاقاتَ متماثلة من حيث اللون والمقاس وتخلط البطاقات جيدًا فى صندوق ثم تسحب بطاقة من الصندوق عشوائيًا حتى تنتهى من اختيار العدد المطلوب للعينة.

(ب) **الطريقة الثانية:** [إذا كان حجم المجتمع كبيرًا]

وهذه الطريقة تستخدم فيها خاصية الرقم العشوائى الموجودة بالآله الحاسبة العلمية هكذا:



وتعتبر هذه الطريقة مناسبة لاختيار عينه مكونه من 40 طالبًا من مدرسة بها 800 طالب.

2 العينة العشوائية الطبقية:

وتستخدم فى المجتمعات غير المتجانسة حيث تُقسم فيها مفردات المجتمع الإحصائى إلى طبقات ويختار الباحث عينه عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع.

مثال

عند دراسة المستوى الدراسى لمجتمع ما يتكون من 450 تلميذًا فى الصفين الأول والثانى الإعدادى وكانت النسبة بين عدد تلاميذ الصف الأول إلى الصف الثانى $\frac{4}{5}$ وأردنا اختيار عينه طبقية مكونه من 54 تلميذًا حيث تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها. **احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.**

الحل

- مجموع أجزاء النسبة = 5 + 4 = 9 أجزاء.
- عدد تلاميذ الصف الأول الإعدادى = $\frac{4}{9} \times 450 = 200$ تلميذًا.
- عدد تلاميذ الصف الثانى الإعدادى = $\frac{5}{9} \times 450 = 250$ تلميذًا.a
- عدد مفردات الصف الأول الإعدادى فى العينة = $\frac{200}{450} \times 54 = 24$ تلميذًا.
- عدد مفردات الصف الثانى الإعدادى فى العينة = $\frac{250}{450} \times 54 = 30$ تلميذًا.

ثالثًا

1 الاحتمال وتوقع الأحداث:

- يساعد حساب الاحتمال على توقع حدوث الأحداث المستقبلية بناء على المعلومات المتاحة لدينا ويستخدم فى حياتنا اليومية فى كثير من المجالات مثل: الأرصاد الجوية، والاقتصاد، الألعاب الرياضية والمنافسات والأبحاث العلمية وغيرها..

2 الاحتمال النظرى:

ويقوم على مبدأ تكافؤ الفرض:

- ويتم حساب هذا الاحتمال عن طريق القانون الآتى:
- احتمال وقوع أى حدث (A) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث (A)}}{\text{العدد الكلى للنواتج}}$ ويرمز له P (A)
- ويمكن استخدام هذا القانون أيضًا لكى نحسب العدد المتوقع لناتج حدث ما عند تغير عدد المفردات فى المجتمع بالقانون:

عدد نواتج الحدث A = P (A) × العدد الكلى للنواتج.

امتحانات الأضواء الأسترشادية

امتحان 1

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $3a = 4b$ ، فإن: $b : a =$ ....

(أ) $4 : 3$ (ب) $3 : 4$ (جـ) $7 : 3$ (د) $3 : 7$

2 إذا كانت: $X = \{4\}$ ، فإن: $n(X^2) =$ ....

(أ) 1 (ب) 16 (جـ) $\{(4 , 4)\}$ (د) 4

3 فى أى دائرة، ما قيمة $\frac{d}{c}$ ؟ .... (حيث d طول قطر الدائرة ، c محيط الدائرة)

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{2}{\pi}$ (جـ) $\frac{1}{\pi}$ (د) π

4 ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(2 , 3) , B(1 , 5)$ .... ؟

(أ) 2 (ب) 0 (جـ) غير معرف (د) -2

5 إذا كان $(x + 3 , xy) = (5 , -8)$ فإن: $y^x =$ ....

(أ) 8 (ب) -8 (جـ) 16 (د) -16

6 منشور رباعى قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 8 سم، إذا كان ارتفاع المنشور 10 سم فإن حجمه؟ ....

(أ) 64 سم^3 (ب) 100 سم^3 (جـ) 640 سم^3 (د) 800 سم^3

7 إذا كان احتمال تسجيل هدف من رمية جزاء فى مباراة لكرة اليد هو 80% فما عدد الأهداف المتوقع تسجيلها عند رمى 20 رمية؟ ....

(أ) 4 (ب) 8 (جـ) 16 (د) 24

8 ما مجموعة حل المعادلة: $\sqrt{3}\,x - 2 = 1$ فى R؟ ....

(أ) $\{3\}$ (ب) $\{\sqrt{3}\}$ (جـ) $\{\sqrt[3]{3}\}$ (د) $\{\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

9 بُعد النقطة $A(\sqrt{2} , -\sqrt{7})$ عن نقطة الأصل هى ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 9 (د) 16

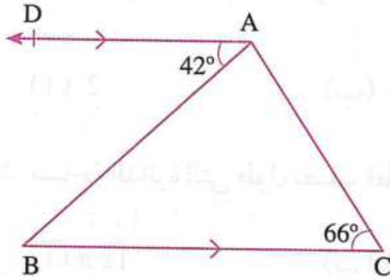
المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت: $X = \{2 , 3 , 4\}$, $Y = \{2 , 4 , 8 , 12 , 16\}$ وكانت R علاقة من X إلى Y حيث x R y تعنى «$y = 2^x$» لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

(أ) اكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. (ب) مثل R بالمخطط السهمى

(جـ) هل R دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد مجالها ومداها.

2 بالاستعانة بالشكل المقابل:

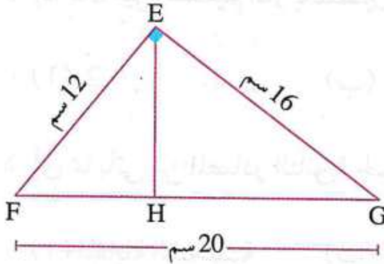


أثبت أن: $BC > AC$

3 إذا كانت: x , y , 18 فى تناسب، $x + y = 20$ فأوجد كلًّا من: x , y

4 إذا كانت $f(x) = 3x + b$ والنقطة (4 , 7) تقع على المستقيم الذى يُمثل الدالة f فأوجد قيمة كلًّا من b , $f(1)$

5 فى الشكل المقابل: Δ FEG قائم الزاوية فى E ، $\overline{EH} \perp \overline{FG}$



EG = 16 سم ، FG = 20 سم ، EF = 12 سم

(أ) أوجد طول مسقط $\overline{EG}$ على $\overleftrightarrow{FG}$

(ب) أوجد طول كل من $\overline{HE}$, $\overline{HF}$

6 أثبت أن النقط: A (1 , –2) , B (2 , 2) , C (–1 , 2) , D (–2 , –2) هى رءوس متوازى الأضلاع ABCD

7 عند أخذ عينة مكونة من 30 طالبًا من بين 750 طالبًا فى إحدى المدارس وسؤالهم عن النشاط المفضل لهم، كانت إجاباتهم كما بالجدول المقابل:

(أ) إذا اختير طالب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الطالب من مفضلى نشاط السباحة؟

(ب) ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط السباحة فى المدرسة؟

(جـ) ما العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط الكرة الطائرة فى المدرسة؟

النشاط	التكرار
كرة القدم	15
السباحة	8
كرة اليد	4
كرة الطائرة	3

امتحان 2

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: x هو الوسط المتناسب الموجب بين العددين 5 , 20 فما قيمة x؟ ....

(أ) 10 (ب) ± 10 (جـ) 100 (د) 5

2 إذا كان: $X = \{1 , 2 , 5\}$ وكان $n(X \times Y) = 6$ ، فإن .... $n(Y^2)$

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 6 (د) 8

3 مساحة الدائرة التى طول نصف قطرها 12 م ، تساوى .... م²

(أ) 12π (ب) 24π (جـ) 72π (د) 144π

4 منشور خماسى قائم ارتفاعه 12 سم ، وحجمه 300 سم³ فإن مساحة قاعدته = ...

(أ) 50 سم² (ب) 60 سم² (جـ) 25 سم² (د) 3600 سم²

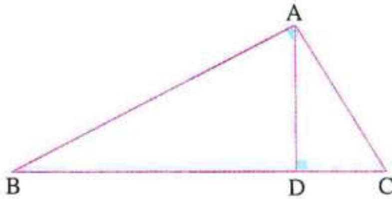
5 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3 , -2)$, $(-2 , a)$ يساوى صفر فما قيمة a؟ ....

(أ) 2 (ب) -2 (جـ) $\frac{-1}{2}$ (د) 0

6 أى مما يأتى من المصادر الثانوية لجمع البيانات؟

(أ) المقابلة الشخصية (ب) الاستبيان (جـ) قاعدة بيانات الموظفين (د) الملاحظة والقياس

7 فى الشكل المقابل: مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو:



(أ) $\overline{AD}$ (ب) $\overline{DB}$

(جـ) $\overline{DC}$ (د) $\{D\}$

8 بُعد النقطة $B(-4 , 3)$ عن نقطة الأصل = ... وحدات طول

(أ) 3 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 6

9 إذا كان احتمال فوز فريق ما فى مباراة هو 60% فكم مباراة متوقع أن يفوز بها من إجمالى 40 مباراة؟ ....

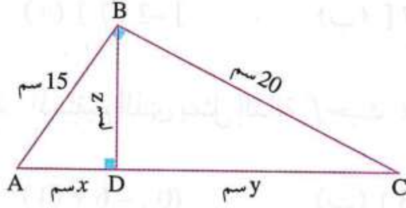
(أ) 38 (ب) 36 (جـ) 24 (د) 22

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c فأثبت أن: $\frac{3a + 4b}{3b + 4c} = \frac{a}{b}$

2 أوجد مجموعة حل المتباينة فى R: $5x + 17 < 4(x + 5) < 9x + 25$

3 فى الشكل المقابل:



أوجد قيم: x , y , z

4 أثبت أن: A(1 , 4) , B(5 , 1) , C(3 , −2) , D(−1 , 1) هى رءوس متوازى أضلاع مستخدمًا قانون البعد بين نقطتين.

5 مثلث أطوال أضلاعه 8 سم، $(2x + 1)$سم ، 15 سم، ما قيمة x الممكنة؟

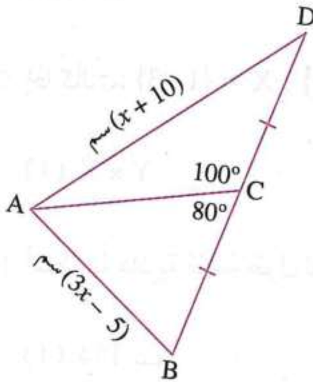
6 إذا كانت R علاقة من X إلى Y حيث: $X = \{1 , 2 , 3\}$, $Y = \{3 , 4 , 5 , 6\}$ وكان x R y

تعنى «$y = x + 3$» لكل $x \in X$ ، $y \in Y$

[1] فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة. [2] مثل العلاقة بالمخطط السهمى.

[3] هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد مجالها ومداها.

7 فى الشكل المقابل:



أوجد مجموعة قيم x الممكنة

امتحان 3

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 مجموعة حل المتباينة: $-2 < x < 7$ فى R هى: ....

(أ) $]-2 , 7]$ (ب) $[-2 , 7[$ (جـ) $[-2 , 7]$ (د) $]-2 , 7[$

2 المستقيم الذى يمثل الدالة f حيث $f(x) = 6 - 2x$ يقطع محور Y فى النقطة ....

(أ) $(0 , -6)$ (ب) $(0 , -3)$ (جـ) $(0 , 3)$ (د) $(0 , 6)$

3 إذا كانت: $x , 5 , 7 , 35$ متناسبة فما قيمة x ؟ ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 1 (د) 7

4 ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $(5 , 3)$ ، $(3 , -2)$ هو ....

(أ) 0 (ب) -1 (جـ) 1 (د) غير معرف

5 إذا كان: $\frac{b}{4} = \frac{a}{3}$ ، فإن: $\frac{a + b}{a} =$

(أ) $\frac{3}{7}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{4}{7}$ (د) $\frac{7}{3}$

6 مساحة الدائرة التى محيطها 28π سم هى .... سم^2

(أ) 36π (ب) 72π (جـ) 196π (د) 112π

7 إذا كانت: $X = \{1 , 3\}$, $Y = \{4 , 5\}$ ، فإن $(5 , 1) \in$ ....

(أ) $Y \times X$ (ب) $X \times Y$ (جـ) X^2 (د) Y^2

8 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 7 سم وارتفاعها 10 سم ، ما حجمها؟

(أ) 154 سم^3 (ب) 490π سم^3 (جـ) 154 سم^3 (د) 440 سم^3

9 ما البعد بين النقطتين $(2 , 13)$, $(4 , 14)$؟

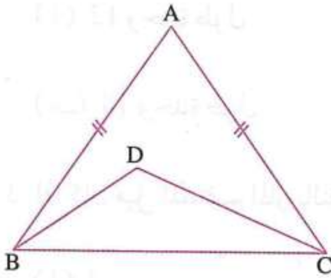
(أ) 13 وحدة طول (ب) 14 وحدة طول (جـ) 15 وحدة طول (د) 12 وحدة طول

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان لدى عادل ثلاثة أبناء وأعمارهم الآن هى 6 سنوات، 10 سنوات، 18 سنة، فمنذ كم من الأعوام كانت أعمارهم متناسبة؟

2 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ ، $Y = \{0 , 1 , 2 , 4 , 5\}$ وكان xRy تعنى "$y = x^2$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$ فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، ومثل العلاقة بمخطط سهمى ، وهل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد المدى.

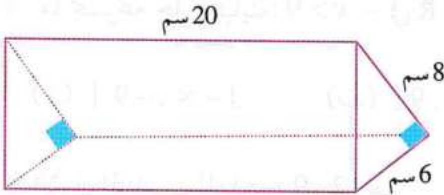
3 فى الشكل المقابل:



$AB = AC$ ، $m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

أثبت أن $DC > DB$

4 أوجد الحجم والمساحة الكلية للمنشور المقابل:



5 إذا كانت: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{4a + mb + 5c}{25}$ فأوجد قيمة: m

6 عينة عشوائية من طلاب مدرسة مكونة من 30 طالبًا و20 طالبة منهم 8 طلاب و5 طالبات يلبسون نظارة، فإذا اختير شخص عشوائيًا من هذه العينة فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص طالب لا يلبس نظارة ، وإذا كان العدد الكلى فى المدرسة هو 500 طالب وطالبة فأوجد العدد المتوقع للطلاب الذين لا يلبسون نظارة.

7 أوجد قيمة x الحقيقية التى تحقق: $5x - 7 < 3(x + 1) \leqslant 8x + 4$

امتحان 4

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 أسطوانة دائرية قائمة حجمها 125.6 سم^3 وارتفاعها 2.5 سم، فإن طول نصف قطرها .... $(\pi \approx 3.14)$

(أ) 2 سم (ب) 4 سم (جـ) 6 سم (د) 8 سم

2 المسافة بين النقطتين $(2 , -1)$, $(2 , 13)$ ؟

(أ) 12 وحدة طول (ب) 10 وحدة طول

(جـ) 14 وحدة طول (د) 15 وحدة طول

3 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3 , k)$, $(-2 , 5)$ هو 2 فإن قيم .... $= k$

(أ) 2 (ب) 5 (جـ) 10 (د) 15

4 ما مجموعة حل المتباينة: $-x > 9$ في R ؟

(أ) $]-\infty , -9[$ (ب) $]-\infty , 9[$ (جـ) $]-9 , \infty[$ (د) $]9 , \infty[$

5 الأول المتناسب للعددين 9 , 12 هو ....

(أ) 14 (ب) 8 (جـ) 16 (د) 18

6 إذا كان: $X \times Y = \{(3 , 2) , (3 , 7) , (6 , b) , (6 , 2)\}$ ، فإن: .... $= X$

(أ) $\{6 , 2\}$ (ب) $\{3 , 7\}$ (جـ) $\{3 , 6\}$ (د) $\{3 , 2\}$

7 المستقيم الذي يمثل الدالة f حيث $f(x) = 12 - 3x$ يقطع محور X في النقطة ....

(أ) $(0 , 12)$ (ب) $(4 , 0)$ (جـ) $(0 , 4)$ (د) $(0 , -4)$

8 يعتبر أسلوب العينات هو الأسلوب المناسب لكل مما يأتي ما عدا ....

(أ) فحص إنتاج مصنع (ب) فحص رمال الصحراء (جـ) معرفة تعداد السكان (د) فحص دم مريض

9 إذا كانت $f(x) = 5$ فما قيمة: $\frac{6 f(6)}{7 f(4)}$ ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{6}{7}$ (جـ) $\frac{18}{14}$ (د) $\frac{3}{7}$

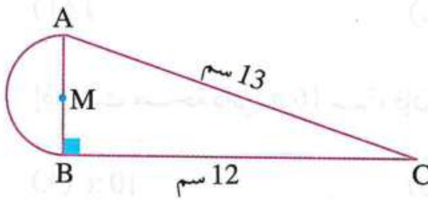
المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{4 , 5 , 6 , 7\}$, $Y = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ وكان xRy تعني "$y = x - 3$" لكل $x \in X$ ، $y \in Y$ فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، ومثل العلاقة بمخطط سهمى ، وهل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد المدى.

2 أوجد قيمة x الحقيقية التى تحقق: $-1 < 10 - 2(x + 5) \leqslant 16$ ومثلها على خط الأعداد.

3 أوجد محيط ومساحة الشكل المقابل:

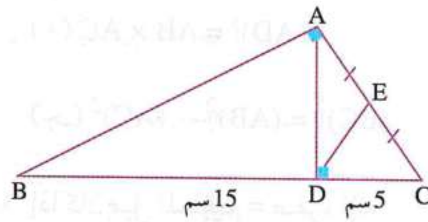
$(\pi \approx 3.14)$



4 باستخدام قانون البعد بين نقطتين أثبت أن النقاط: $A(-1 , -3)$, $B(1 , 1)$, $C(3 , 5)$ تقع على استقامة واحدة.

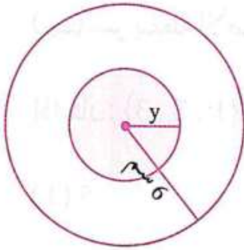
5 فى الشكل المقابل:

أوجد طول $\overline{DE}$ ؟



6 إذا كانت: a , b , c , d كميات متناسبة، فأثبت أن: $\frac{ac}{bd} = \frac{2a^2 - 3c^2}{2b^2 - 3d^2}$

7 فى يوم رياضى طُلب من مجموعة من المتنافسين التصويب على اللوحة المقابلة، إذا كان احتمال أن يصيب أحد المتنافسين الجزء المظلل هو $\frac{1}{4}$ ، فما قيمة y؟



امتحان 5

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: a , b , c فى تناسب متسلسل، فإن .... = a c

(أ) b^2 (ب) a^2 (جـ) $\frac{a}{c}$ (د) c^2

2 المسافة بين النقطتين: (2 , 1−) , (6 , 2) هى .... وحدة طول.

(أ) 1 (ب) 5 (جـ) 25 (د) 7

3 إذا كانت مساحة دائرة 16π سم^2، فإن محيطها = ... سم.

(أ) 10π (ب) 32π (جـ) 16π (د) 8π

4 فى المثلث ABC القائم الزاوية فى A إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $D \in \overline{CB}$، فأى علاقة من الآتى صحيحة؟

(أ) $(AD)^2 = AB \times AC$ (ب) $(AB)^2 = BD \times DC$

(جـ) $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2$ (د) $(AB)^2 = BD \times BC$

5 إذا كان ميل المستقيم = صفر، فإنه ....

(أ) يوازى محور X (ب) يوازى محور Y

(جـ) يمر بنقطة الأصل (د) يصنع زاوية حادة الاتجاه مع الموجب لمحور السينات

6 إذا كان: $X = \{1 , 2 , 3\}$, $Y = \{4 , 5 , 6\}$ ، فإن: .... = $n(X \times Y)$

(أ) 5 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 8

7 المساحة الكلية لمنشور قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 4 سم وارتفاع المنشور 10 سم تساوى ....

(أ) 192سم^2 (ب) 176سم^2 (جـ) 160سم^2 (د) 40سم^2

8 إذا كانت: $f(x) = 2x + 3$ وكانت $f(k) = 11$ فإن: .... = k

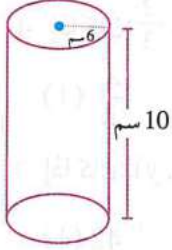
(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 2− (د) 6

9 إذا كان احتمال فوز فريق هو 0.8 فإن عدد المباريات المتوقع الفوز بها خلال 20 مباراة هى .... مباراة

(أ) 16 (ب) 12 (جـ) 10 (د) 15

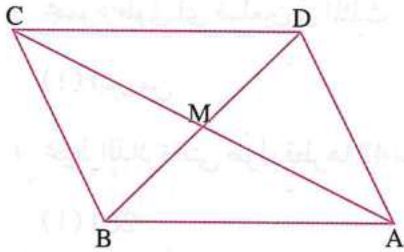
المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ ، فأثبت أن: $\frac{2a + b + 5c}{3a - 5b - c} = \frac{21}{17}$



2 أوجد المساحة الجانبية وحجم الأسطوانة المقابلة:

$(\pi = 3.14)$



3 فى الشكل المقابل:

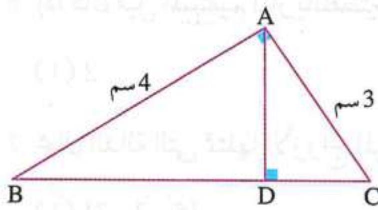
ABCD متوازى أضلاع قطراه متقاطعان فى M

$m(\angle AMB) > m(\angle CMB)$ برهن أن: $AB > BC$

4 إذا كانت: R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{2 , 3 , 4 , 5\}$, $Y = \{4 , 6 , 8 , 10 , 12\}$ وكان xRy تعنى "$y = 2x$"

لكل $x \in X$ ، $y \in Y$. فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، وهل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة فأوجد المدى.

5 فى الشكل المقابل:



إذا كانت: $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$

فأوجد طول كل من: $\overline{CD}$, $\overline{AD}$

6 إذا كانت: $X = \{7 , 8 , 9\}$, $n(X \times Y) = 24$ ، فأوجد: $n(Y^2)$

7 فصل دراسى به 36 تلميذًا نجح منهم 27 تلميذًا فى الرياضيات و12 تلميذًا فى اللغة العربية و9 فى الامتحانين معًا،

فإذا اختير تلميذ عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار:

أولًا: 1 ناجحًا فى الرياضيات فقط.

2 ناجحًا فى اللغة العربية.

3 راسبًا فى اللغة العربية.

4 راسبًا فى الرياضيات واللغة العربية معًا.

ثانيًا: إذا كان العدد الكلى للمدرسة 540 تلميذًا، فما العدد المتوقع للتلاميذ الناجحين فى الرياضيات فقط؟

امتحان 6

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كان: $\frac{2}{3} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ ، فإن قيمة: $\frac{a+c}{b+d}$ تساوى ....

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{5}{3}$ (د) $\frac{1}{3}$

2 إذا كان: $(x + 2 , y) = (18 , 8)$ فإن: .... $= x + y$

(أ) 42 (ب) 18 (جـ) 24 (د) 12

3 مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) غير ذلك

4 محيط الدائرة التى طول قطرها 42 سم ≈ .... سم. $(\pi \approx \frac{22}{7})$

(أ) 264 (ب) 132 (جـ) 84 (د) 42

5 من مميزات أسلوب الحصر الشامل أنه ....

(أ) يوفر الوقت والتكلفة. (ب) يعطى نتائج دقيقة تشمل كل أفراد المجتمع.

(جـ) يعتمد على العينة فقط. (د) مناسب عندما يكون من الصعب الوصول لكل فرد.

6 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3 , 2) , (k , -1)$ هو 3 ، فإن قيمة k تساوى ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 5 (د) 6

7 مجال الدالة التى تمثلها الأزواج المرتبة: $\{(3 , 0) , (2 , 4) , (3 , 3) , (5 , 2)\}$ هو: ....

(أ) $\{5 , 2 , 3\}$ (ب) $\{5 , 3 , 4 , 0\}$ (جـ) $\{2 , 3\}$ (د) $\{5 , 3\}$

8 مجموعة حل المعادلة: $2x + 3 = 9$ فى R هى: ....

(أ) $\{3\}$ (ب) $\{6\}$ (جـ) $\{-3\}$ (د) $\varnothing$

9 ما بُعد النقطة $B(-2 , 4)$ عن نقطة الأصل؟ ....

(أ) 4 وحدات طول (ب) 2 وحدة طول (جـ) $2\sqrt{5}$ وحدة طول (د) 5 وحدات طول

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

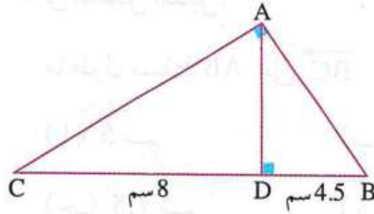
1 إذا كانت: $54 , y , x , 2$ فى تناسب متسلسل، فأوجد قيمة كل من x , y

2 أثبت أن النقاط $A(3 , 1) , B(0 , -2) , C(-1 , 0)$ هى رءوس مثلث، ثم حدد نوعه بالنسبة لزواياه.

3 إذا كانت: $X = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$, N هى مجموعة الأعداد الطبيعية، وكانت f دالة من X إلى N

حيث $f(x) = x^2 - 1$ فاكتب f كمجموعة أزواج مرتبة، ثم أوجد مدى الدالة.

4 فى الشكل المقابل:



ΔBAC قائم الزاوية، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

$DC = 8$ سم ، $BD = 4.5$ سم

أوجد بالبرهان طول كل من: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$

5 دائرة مساحتها 64π سم^2 ، أوجد طول نصف قطرها، ثم أوجد محيطها لأقرب جزء من عشرة. علمًا بأن $(\pi \approx 3.14)$

6 إذا كان $f(x) = 5x - a$ والنقطة (5 , 3) تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f ، فأوجد قيمة كل من a , $f(0)$

7 عينة عشــوائية من مدرســة تتكون من 34 ولدًا و26 بنتًا منهم 15 ولدًا و6 بنات يدرســون اللغة الفرنسية، فإذا اختير عشوائيًا شخص من هذه المدرسة فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص ولدًا لا يدرس اللغة الفرنسية، وإذا كان العدد الكلى فى المدرسة 420 طالبًا فأوجد العدد المتوقع للأولاد الذين لا يدرسون اللغة الفرنسية بالمدرسة.

امتحان 7

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت: 30 , 24 , 10 , y متناسبة، فما قيمة y ؟ ....

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 5 (د) 8

2 مجموعة حل المتباينة: $6 < x - 1$ فى R هى: ....

(أ) $[7, \infty[$ (ب) $]-7, \infty[$ (جـ) $]7, \infty[$ (د) $[5, 7]$

3 **إذا كانت:** $f(x) = x + 5$ ، $g(x) = 2x$ فما قيمة $f(2) + 2g(5)$ ؟ ....

(أ) 17 (ب) 72 (جـ) 27 (د) 15

4 مساحة الدائرة التى طول قطرها 10 سم يساوى .... سم^2

(أ) 10π (ب) 50π (جـ) 2.5π (د) 100π

5 مدرسة بها 500 طالب وطالبة، اختيرت منهم عينة عشوائية مكونة من 30 طالبًا، فوجد أن عدد البنات 15 بنتًا، فما عدد الأولاد المتوقع فى المدرسة؟ ....

(أ) 200 (ب) 250 (جـ) 300 (د) 350

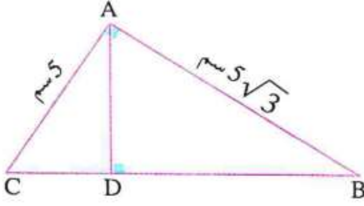
6 البعد بين النقطتين (9 , 6) ، (12 , 2) يساوى ....

(أ) 4 وحدات طول (ب) 3 وحدات طول (جـ) 5 وحدات طول (د) 10وحدات طول

7 ما ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (3 , 1) ، (4 , 3-) ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{3}$

8 فى الشكل المقابل:



ما طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overrightarrow{BC}$

(أ) 5 سم (ب) 10 سم

(جـ) 7.5 سم (د) 7 سم

9 أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها 10 سم وارتفاعها 12 سم ، ما حجمها؟ ....سم^3

(أ) 120π (ب) 12π (جـ) 60π (د) 300π

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فأثبت أن: $\frac{a+3b}{b+5c} = \frac{2a+3b}{3c+2b}$

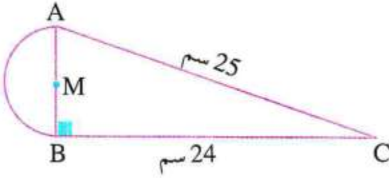
2 إذا كانت: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، وكانت R علاقة على X حيث $x\,R\,y$ تعنى "$y = x + 1$" لكل $x \in X$، $y \in Y$:

(أ) فاكتب العلاقة كمجموعة أزواج مرتبة.

(ب) مثل العلاقة بالمخطط السهمى.

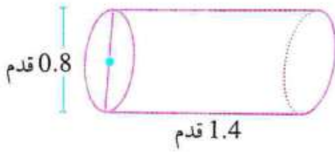
3 إذا كانت: $f(x) = 3x - a$ يقطع محور الصادات فى النقطة (2 , b)، **فأوجد** قيمة $2a + 3b$

4 **أوجد** مساحة الشكل المقابل:



علمًا بأن: $(\pi \approx \frac{22}{7})$

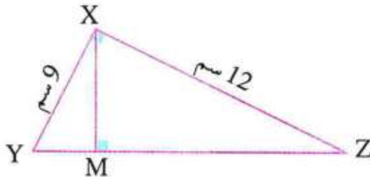
5 فى الشكل المقابل:



أوجد حجم الأسطوانة

علمًا بأن: $(\pi \approx \frac{22}{7})$

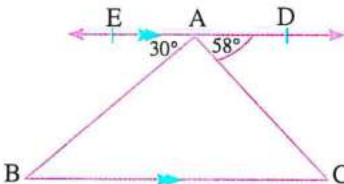
6 فى الشكل المقابل:



إذا كانت: $\overline{XZ} \perp \overline{XY}$ ، $\overline{MX} \perp \overline{YZ}$

فأوجد طول كل من: $\overline{XM}$ ، $\overline{MZ}$

7 فى الشكل المقابل:



إذا كان: $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$

فأثبت أن: $AB > AC$

امتحان 8

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت الأعداد 32 ، b ، a متناسبة، 10 = b + a فإن .... (a , b) حيث b ، a أعداد موجبة.

(أ) $(5,5)$ (ب) $(8,2)$ (جـ) $(2,8)$ (د) $(4,6)$

2 إذا كان: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ فإن: .... $= \frac{x-y}{x+y}$

(أ) $\frac{-1}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$

3 إذا كان: $f(x) = 7$ ، فإن: .... $= f(4)$

(أ) 5 (ب) 4 (جـ) 7 (د) 3

4 مجموعة حل المعادلة: $7x + 4 = 11$ فى R هى ....

(أ) $\{11 , 7\}$ (ب) $\{7 , 1\}$ (جـ) $\{1\}$ (د) $\{1 , 0\}$

5 أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوى ارتفاعها، فإذا كان حجم الأسطوانة 125π سم^3

فما مساحتها الجانبية؟ ....

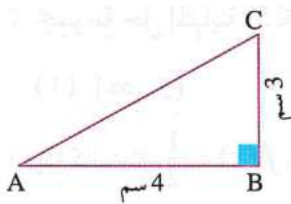
(أ) 50π سم^2 (ب) 100π سم^2 (جـ) 150π سم^2 (د) 125π سم^2

6 إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (4 , 2) ، (a, 3) يساوى 1 فإن قيمة .... = a

(أ) 3 (ب) 1 (جـ) 5 (د) 6

7 فى الشكل المقابل:

ما هو مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ ؟



(أ) 5سم (ب) $\sqrt{17}$ سم

(جـ) 17سم (د) 3.2سم

8 ما البُعد بين النقطة (2 , 7 −) ونقطة الأصل؟ ....

(أ) 5 وحدات طول (ب) $\sqrt{35}$ وحدة طول

(جـ) $\sqrt{53}$ وحدة طول (د) $\sqrt{23}$ وحدة طول

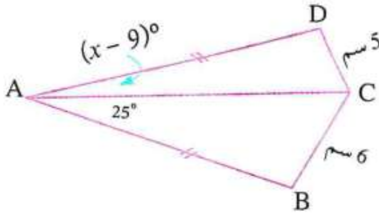
9 من المصادر الثانوية لجمع البيانات ....

(أ) المقابلة الشخصية (ب) الاستبيانات

(جـ) قاعدة بيانات الموظفين (د) الملاحظة والقياس

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كانت الدالة $f(x) = 3x - 6$ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (b , 2b)، **فأوجد** قيمة b ، **ثم أوجد** نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور Y .



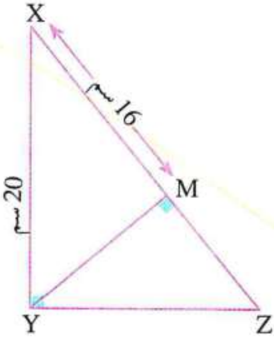
2 **فى الشكل المقابل:**

أوجد مجموعة قيم X الممكنة.

3 مثِّل بيانيًا الدالـة f حيث $f(x) = 2 - x$

4 إذا كانت $n(X^2) = 16$ ، $n(X \times Y) = 12$ ، $Z = \{1 , 5\}$

فأوجد: $n(Y \times Z)$



5 **فى الشكل المقابل:**

أوجد طول $\overline{MZ}$ ....

6 دائرة مساحتها 88.5 سم^2، أوجد طول نصف قطرها ومحيطها $(\pi \approx 3.14)$

7 منشور ثلاثى قائم، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية، فيه طولا ضلعى القائمة هما 6 سم ، 5 سم ، وارتفاعه 10 سم، أوجد حجمه.

امتحان 9

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت 2 , y , 8 , 12 متناسبة، فما قيمة y ؟ ....

(أ) 4 (ب) 6 (جـ) 3 (د) 2

2 مجموعة حل المتباينة: $-x \leqslant 5$ فى R هى: ....

(أ) $[5 , \infty[$ (ب) $]5 , \infty[$ (جـ) $[-5 , \infty[$ (د) $]-\infty , 5]$

3 إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2}x$ ، $g(x) = x^2$ فما قيمة $4f(2) + g(4) =$ ؟ ....

(أ) 16 (ب) 4 (جـ) 18 (د) 20

4 إذا كان احتمال خسارة فريق فى كرة القدم فى مباراة واحدة هو 0.25 ، فكم مباراة متوقع أن يخسرها الفريق من إجمالى 20 مباراة؟ ....

(أ) 5 مباريات (ب) 7 مباريات (جـ) 10 مباريات (د) 12مباراة

5 إذا كان $X = \{4\}$ فإن .... $= X^2$

(أ) 1 (ب) {4 , 4} (جـ) {(4 , 4)} (د) {(4 , 1)}

6 إذا كان: A (3 , −4) ، B (5 , 7) فإن طول $\overline{AB}$ يساوى ....

(أ) 5 وحدات طول (ب) $\sqrt{5}$ وحدات طول (جـ) $5\sqrt{5}$ وحدة طول (د) 10 وحدات طول

7 دائرة طول قطرها 8 سم، فما محيطها؟ ....

(أ) 6π سم (ب) 12π سم (جـ) 8π سم (د) 16π سم

8 ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (6 , 3) ، (5 , 3 −) يساوى ....

(أ) 6 (ب) $\frac{1}{6}$ (جـ) 8 (د) $\frac{1}{8}$

9 إذا كانت العلاقة R تمثلها مجموعة الأزواج المرتبة {(1 , 2) ، (5 , 2) ، (3 , 4)} فإن R تمثل دالة مداها ....

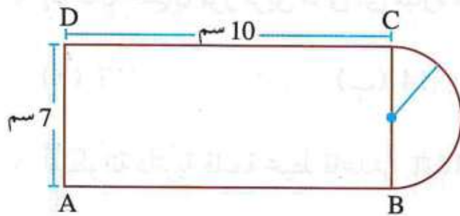
(أ) {1 , 2 , 4} (ب) {2 , 4 , 1 , 3 , 5} (جـ) {5 , 3} (د) {2 , 4}

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

1 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فأثبت أن: $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$

2 مثّل الدالـة $f(x) = 3x - 1$ بيانيًا

3 فى الشكل المقابل:



أوجد مساحة الشكل.

علمًا بأن: $\left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

4 منشور ثلاثى قائم، قاعدته مثلث قائم الزاوية طولى ضلعى القائمة فيه 3 سم ، 4 سم ، وارتفاع المنشور 10 سم.

أوجد حجم المنشور.

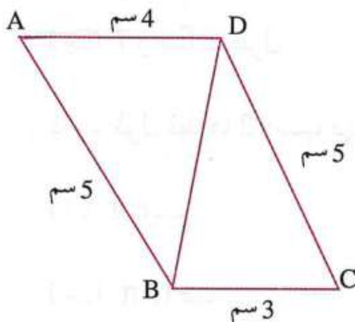
5 إذا كانت X= {2 , 3 , 5} ، Y= {4 , 9 , 10 , 25} وكانت R علاقة من X إلى Y حيث a R b تعنى " $b = a^2$ "

لكل $a \in X$ ، $b \in Y$:

(أ) فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، ومثّلها بمخطط سهمى.

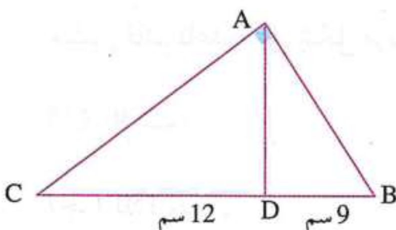
(ب) هل العلاقة R تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

6 فى الشكل المقابل:



أثبت أن: $m(\angle ABD) < m(\angle CDB)$

7 فى الشكل المقابل: أوجد



(أ) طول $\overline{AD}$

(ب) طول $\overline{AB}$

امتحان الكتاب المدرسى

المجموعة الأولى: اختر الإجابة الصحيحة:

1 إذا كانت 30 , 12 , 5 , x متناسبة، فما قيمة x ؟ ....

(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 4 (د) 16

2 ما مجموعة حل المتباينة $-x > 4$ فى R ؟ ....

(أ) $]-\infty , -4[$ (ب) $]-\infty , 4[$ (جـ) $]-4 , \infty[$ (د) $]4 , \infty[$

3 إذا كانت: $f(x) = x + 3$ ، $g(x) = x^2$ فما قيمة $2f(3) + 3g(2)$ ؟ ....

(أ) 12 (ب) 18 (جـ) 24 (د) 36

4 إذا كان احتمال فوز فريق ما فى أى مباراة هو 80% ، فكم مباراة متوقع أن يفوز بها من إجمالى 35 مباراة؟ ....

(أ) 7 (ب) 14 (جـ) 21 (د) 28

5 أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها 16π سم وارتفاعها 2 سم ، فما حجمها؟ ....

(أ) 16π سم^3 (ب) 32π سم^3 (جـ) 64π سم^3 (د) 128π سم^3

6 ما ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(7 , 2)$ ، $(-4 , 8)$ ؟ ....

(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{6}$ (جـ) $-\frac{2}{3}$ (د) -6

7 ما البُعد بين النقطتين $(7 , 4)$ ، $(11 , 1)$ ؟ ....

(أ) 5 وحدات طول (ب) 6 وحدات طول

(جـ) 7 وحدات طول (د) 8 وحدات طول

8 دائرة طول قطرها 12 سم، فما محيطها؟ ....

(أ) 6π سم (ب) 12π سم

(جـ) 18π سم (د) 24π سم

9 منشور قائم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه 5 سم، وارتفاع المنشور 6 سم ، فما مساحته الجانبية؟ ....

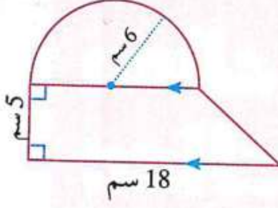
(أ) 30 سم^2 (ب) 120 سم^2

(جـ) 150 سم^2 (د) 170 سم^2

المجموعة الثانية: أجب عن الأسئلة الآتية:

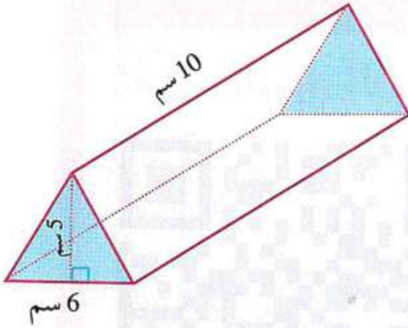
1 إذا كان b وسطًا متناسبًا بين a , c ، فأثبت أن: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a+3b}{3c+b}$

2 مثّل بيانيًا الدالـة f حيث $f(x) = 4 - 2x$



3 أوجد مساحة الشكل المقابل:

علمًا بأن: $(\pi \approx \frac{22}{7})$



4 فى الشكل المقابل:

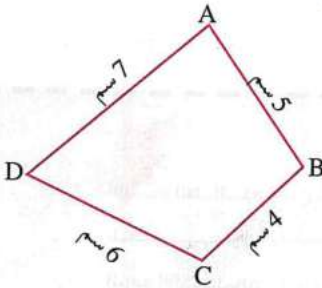
أوجد حجم المنشور.

5 إذا كانت R علاقة من X إلى Y حيث $X = \{2 , 3 , 5\}$ ، $Y = \{5 , 7 , 8\}$

وكانت xR y تعنى " $x + y = 10$"

لكل $x \in X$ ، $y \in Y$:

- فاكتب R كمجموعة أزواج مرتبة، ومثّلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.
- هل العلاقة تمثل دالة أم لا؟ ولماذا؟

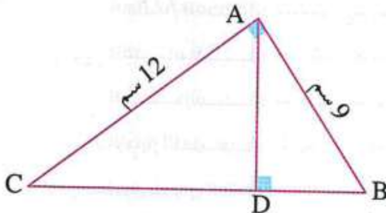


6 فى الشكل المقابل:

ABCD شكل رباعى فيه:

AB = 5 سم ، BC = 4 سم ، CD = 6 سم ، DA = 7 سم

أثبت أن: $m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$



7 فى الشكل المقابل:

إذا كانت: $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

فأوجد طول كل من: $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$



رقم الإيداع: 2025/23319
خدمة العملاء: 16766

الأضواء



الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

2

2026

الإجابات النموذجية

الوحدة الأولى

الدرس الأول

س سؤال الدرس 1

الجزء (1)

1 1 (أ) 1 (ب) ± 6

2 نفرض أن الثانى المتناسب هو a

$\therefore 6, a, 8, 12$ متناسبة

$\therefore \frac{6}{a} = \frac{8}{12} \Rightarrow a = \frac{6 \times 12}{8} = 9$

3 ∵ الكميات 18، 2a، a، 4 متناسبة

$\therefore \frac{4}{a} = \frac{2a}{18}$

$\therefore a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$

---

2 1 نفرض أن العدد هو x، مربعه هو x^2

$\therefore \frac{11+x^2}{7+x^2} = \frac{5}{4}$

$\therefore 44 + 4x^2 = 35 + 5x^2$

$\therefore x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

∴ العدد هو 3 أو -3

2 $\because \frac{3x+5}{3y+7} = \frac{x-5}{y-7}$

$\therefore (3x+5)(y-7) = (x-5)(3y+7)$

$\therefore 3xy - 21x + 5y - 35 = 3xy + 7x - 15y - 35$

$\therefore 28x = 20y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$

3 (أ) $\frac{-1}{8}$ (ب) 4

---

3 1

$\because \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$\therefore d(a-b) = b(c-d)$

$\therefore da - db = bc - bd$

$\therefore da = bc$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore a, b, c, d$ متناسبة

تنوع الاستراتيجيات

$\because \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore a, b, c, d$ متناسبة

2 $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} = k$

$x = 2k, \ y = 5k, \ z = 3k$

$\frac{2x - y + z}{3x + y - z} = \frac{2(2k) - 5k + 3k}{3(2k) + 5k - 3k} = \frac{4k - 2k}{6k + 2k} = \frac{2k}{8k} = \frac{1}{4}$

---

4 1 $\because a, b, c, d$ متناسبة

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk, \ c = dk$

$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk + dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{(b+d)} = k$ ①

$\because \frac{3a+4c}{3b+4d} = \frac{3(bk) + 4(dk)}{3b+4d} = \frac{k(3b+4d)}{(3b+4d)} = k$ ②

من ①، ②

$\therefore \frac{a+c}{b+d} = \frac{3a+4c}{3b+4d}$

2 بفرض أن: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = bk, \ c = dk$

$\therefore \frac{ax - by}{cx - dy} = \frac{bkx - by}{dkx - dy} = \frac{b(kx - y)}{d(kx - y)} = \frac{b}{d}$ ①

$\because \frac{aL - bn}{cL - dn} = \frac{bkL - bn}{dkL - dn} = \frac{b(kL - n)}{d(kL - n)} = \frac{b}{d}$ ②

من ①، ②

$\therefore \frac{ax - by}{cx - dy} = \frac{aL - bn}{cL - dn}$

---

5 $\because a : b : c = 5 : 7 : 3$

$\therefore \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{3} = k$

$\therefore a = 5k, b = 7k, c = 3k$

$\because a + b = 48$

$\therefore 5k + 7k = 48$

$\therefore 12k = 48 \Rightarrow k = 4$

$\therefore a = 5 \times 4 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 20}$

$b = 7 \times 4 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 28}$

$c = 3 \times 4 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 12}$

تدرب الدرس 1

الجزء (1)

التناسب وخواصه:

1 1 الكميات متناسبة (لأن: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$)

2 الكميات متناسبة (لأن: $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$)

3 الكميات غير متناسبة (لأن: $\frac{3}{4} \neq \frac{6}{9}$)

---

2 1 $x = \frac{3 \times 20}{4} = 15$

2 $2a = \frac{5 \times 8}{2} = 20$ $\therefore a = \frac{20}{2} = 10$

3 $\frac{4}{5} = \frac{x}{10}$ $\therefore x = \frac{4 \times 10}{5} = 8$

4 $\frac{x}{20} = \frac{30}{60}$ $\therefore x = \frac{20 \times 30}{60} = 10$

5 $\frac{2}{7} = \frac{5 \times 2}{x}$ $\therefore \frac{2}{7} = \frac{10}{x}$

$\therefore x = \frac{70}{2}$ $\therefore x = 35$

6 $\frac{a}{15} = \frac{20}{3a}$ $\therefore a \times 3a = 15 \times 20$

$3a^2 = 300$ $\therefore a^2 = \frac{300}{3} = 100$

$\therefore a = \pm\sqrt{100} = \pm 10$

7 $\frac{10}{a} = \frac{5a}{18}$ $\therefore 5a^2 = 18 \times 10$

$\therefore a^2 = \frac{180}{5} = 36$ $\therefore a = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

8 $\therefore \frac{\frac{x}{2}}{\frac{7}{x}} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{7}{3}}$ $\therefore \frac{x}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{x} \times \frac{3x}{2}$

$\frac{7x}{6} = \frac{21}{2}$ $\therefore x = \frac{21}{2} \times \frac{6}{7}$

$\therefore x = 9$

3 ⓫ 15 1 — 8 2 — 1 3
$\frac{7}{2}$ 4 — $\frac{3}{5}$ 5 — $\frac{3}{5}$ 6
$\frac{5}{7}$ 7 — 4 8 — 18 9
4 10 — 5 11 — −9 12
8 : 4 : 3 13

4 ⓵ 1 نفرض العدد هو x

$\blacktriangleright \frac{x+7}{x+12}=\frac{2}{3}$ (الضرب التبادلى)

$3(x+7)=2(x+12)$

$\therefore 3x+21=2x+24$

$\therefore 3x-2x=24-21$

$\therefore x=3$

العدد هو 3

من 2 إلى 6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

من 5 إلى 8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

9

$\because x:y=2:5$

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{2}{5}$

$\therefore 5x=2y \Rightarrow 10x=4y$

$\therefore \frac{10x+3y}{5x+2y}=\frac{4y+3y}{2y+2y}=\frac{7y}{4y}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{10x+3y}{5x+2y}=\frac{7}{4}$

من 10 إلى 13 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

14

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k, k>0$

$\therefore a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

$\blacktriangleright \sqrt{\frac{a^2-c^2-e^2}{b^2-d^2-f^2}}=\sqrt{\frac{b^2k^2-d^2k^2-f^2k^2}{b^2-d^2-f^2}}$

$=\sqrt{\frac{k^2(b^2-d^2-f^2)}{(b^2-d^2-f^2)}}=\sqrt{k^2}=k$ ①

$\blacktriangleright \frac{a}{b}=\frac{bk}{b}=k$ ②

∴ من ①، ② ينتج أن الطرفان متساويان

من 15 إلى 19 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

20 نفرض أن: • نقاط عمر هى x

• نقاط خالد هى y

• نقاط حمزة هى z

$\therefore x+y+z=581$ ①

∵ أربعة أمثال نقاط عمر تساوى خمسة أمثال نقاط خالد

وتساوى سبعة أمثال نقاط حمزة

$\therefore 4x=5y=7z$

◀ (م.م.أ) للأعداد 4 , 5 , 7 هو 140

$\therefore \frac{4x}{140}=\frac{5y}{140}=\frac{7z}{140}$

$\therefore \frac{x}{35}=\frac{y}{28}=\frac{z}{20}=m$

$\therefore x=35m,\ y=28m,\ z=20m$

من معادلة ①

$\therefore 35m+28m+20m=581$

$\blacktriangleright 83m=581$

$\therefore m=7$

∴ • النقاط التى حصل عليها عمر (x) = 245 نقطة

(لأن: $\blacktriangleright x=35\times 7=245$)

• النقاط التى حصل عليها خالد (y) = 196 نقطة

(لأن: $\blacktriangleright y=28\times 7=196$)

• النقاط التى حصل عليها حمزة (z) = 140 نقطة

(لأن: $\blacktriangleright z=20\times 7=140$)

تفكير إبداعى TIMSS

21 نفرض أن الأربعة أعداد المتناسبة هى: a , b , c , d

∴ الثانى المتناسب هو الجذر التربيعى الموجب للرابع المتناسب

$\therefore b=\sqrt{d}$ ، $b^2=d$

والأول المتناسب ينقص 1 عن الثانى المتناسب

$\therefore a=b-1$

والثالث المتناسب هو : 6

$\therefore c=6$

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \frac{b-1}{b}=\frac{6}{b^2}$

$\blacktriangleright b^2(b-1)=6b$

$\therefore b^3-b^2-6b=0$

$\blacktriangleright b(b^2-b-6)=0$

$\therefore b(b+2)(b-3)=0$

$\therefore b=0$ أو $b=3$ أو $b=-2$

$\because b>0$

$\therefore b=3,\ a=b-1=2,\ b^2=d=9$

∴ الأعداد المتناسبة هى: 9 , 6 , 3 , 2

22

$\blacktriangleright \frac{x}{15}=\frac{20}{y}=\frac{15}{z}$

حيث y ، z هما ضلعا القائمة لحوض الزهور، x طول وتر قطعة الأرض

$\therefore x^2=(15)^2+(20)^2$

$\therefore x^2=225+400=625$

$\therefore x=25$

$\therefore \frac{25}{15}=\frac{20}{y}=\frac{15}{z}$

$\blacktriangleright y=\frac{20\times 15}{25}=12$

∴ y = 12 مترًا

$\blacktriangleright z=\frac{15\times 15}{25}=9$

∴ z = 9 أمتار

∴ طولا ضلعى القائمة لحوض الزهور هو: 12 م ، 9 م

اختبر نفسك الدرس 1

الجزء (1)

1

1 48	2 5	3 -11
4 0	5 $\frac{3}{8}$	6 4

2

1 $\frac{1}{2}$	2 12	3 8

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

س سؤال الدرس 1

الجزء (2)

1 $\because \frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=m$

∴ بضرب النسبة الأولى × (1) والنسبة الثانية × (2 −) والنسبة الثالثة × (4) ثم جمع المقدمات والتوالى ينتج أن:

$\frac{a-2b+4c}{4-10+28}=m$

$\therefore \frac{a-2b+4c}{22}=m$

$\therefore \frac{a-2b+4c}{3x+10}=\frac{a-2b+4c}{22}$

$\therefore 3x+10=22 \Rightarrow x=4$

2 $\because \frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{6}$

∴ بجمع المقدمات والتوالى للنسب الثلاث :

① إحدى النسب $=\frac{2x+2y+2z}{5+3+6}=\frac{2(x+y+z)}{14}=\frac{x+y+z}{7} \therefore$

، بضرب النسبة الأولى × (1) والنسبة الثانية × (1 −) ثم جمع المقدمات والتوالى للنسبتين الأولى والثانية:

② إحدى النسب $=\frac{x+y-y-z}{5-3}=\frac{x-z}{2} \therefore$

من ①، ② ينتج أن:

$\therefore \frac{x+y+z}{7}=\frac{x-z}{2}$

$\therefore \frac{x+y+z}{x-z}=\frac{7}{2}$ بتبديل الوسطين

تدرب الدرس 1

الجزء (2)

خاصية (3):

1

1 $\frac{2}{3}$	2 $x+y$	3 $7n$
4 $\frac{8}{15}$	5 10	6 13
7 3	8 7	9 1

2 بضرب حدى النسبة الثانية فى (−2) والثالثة فى (4)

$\therefore \frac{-2y}{-10}=\frac{4z}{28}=\frac{x-2y+4z}{k+20}$

ويجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة:

$\therefore \frac{x-2y+4z}{4-10+28}=\frac{x-2y+4z}{k+20}$ $\therefore \frac{x-2y+4z}{22}=\frac{x-2y+4z}{k+20}$

$\therefore k+20=22$ $\therefore k=2$

من **3** إلى **6** راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

7 بضرب حدى النسبة الأولى فى (2) وجمع مقدمات وتوالى النسبتين:

① إحدى النسب $=\frac{2a+b}{2x+2y+2x-y}=\frac{2a+b}{4x+y} \therefore$

بضرب حدى النسبة الأولى فى (3) والثانية فى (−1) وجمع مقدمات وتوالى النسبتين:

② إحدى النسب $=\frac{3a-b}{3x+3y-2x+y}=\frac{3a-b}{x+4y} \therefore$

من ①، ②:

$\therefore \frac{2a+b}{4x+y}=\frac{3a-b}{x+4y}$

8 بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث:

إحدى النسب $=\frac{x+y+y+z+x+z}{7+5+8} \therefore$

إحدى النسب $=\frac{2x+2y+2z}{20}=\frac{x+y+z}{10} \therefore$

بضرب حدى النسبة الثانية فى (−1) وجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية:

إحدى النسب $=\frac{x+y-y-z}{7-5}=\frac{x-z}{2} \therefore$

$\therefore \frac{x+y+z}{10}=\frac{x-z}{2}$

$\therefore \frac{x+y+z}{x-z}=\frac{10}{2}=5$

9 بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية:

إحدى النسب $=\frac{a+b}{x-y+z+y-z+x} \therefore$

① إحدى النسب $=\frac{a+b}{2x} \therefore$

∴ بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة:

إحدى النسب $=\frac{b+c}{y-z+x+z-x+y} \therefore$

② إحدى النسب $=\frac{b+c}{2y} \therefore$

من ①، ②:

$\therefore \frac{a+b}{2x}=\frac{b+c}{2y}$ $\therefore \frac{a+b}{x}=\frac{b+c}{y}$

10 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)



11 $x+y+z=61$

$\frac{x-8}{3}=\frac{z-4}{5}=\frac{y+15}{8}=k$

$\therefore x-8=3k \Rightarrow x=3k+8$

$\therefore z-4=5k \Rightarrow z=5k+4$

$\therefore y+15=8k \Rightarrow y=8k-15$

$\because x+y+z=61$

$\therefore 3k+8+5k+4+8k-15=61$

$\therefore 16k-3=61$ $\therefore 16k=64$

$\therefore k=4$

∴ طول الضلع $\overline{AB}$ (z):

$z=5(4)+4=24$

∴ طول الضلع $\overline{AB}$ = 24 سم

حل آخر:

$\therefore \frac{x-8}{3}=\frac{z-4}{5}=\frac{y+15}{8}$

$\therefore \frac{x+z+y+3}{16}=\frac{z-4}{5}$ $\qquad$ $\therefore \frac{61+3}{16}=\frac{z-4}{5}$

$\therefore \frac{64}{16}=\frac{z-4}{5}$ $\qquad$ $\therefore \frac{z-4}{5}=4$

$\therefore z-4=20$ $\qquad$ $\therefore \boxed{z=24}$

---

12 بضرب حدى النسبة الأولى فى (3) والثانية × (−1) والثالثة فى (−2)

وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث:

$\therefore \frac{3x+3y-2x-z-2y+2z}{15-9-8}=$ إحدى النسب $=\frac{x+y+z}{-2}$ ①

بضرب حدى النسبة الأولى فى (1 −) والثالثة فى (2)

وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث:

$\therefore \frac{-x-y+2x+z+2y-2z}{-5+9+8}=$ إحدى النسب $=\frac{x+y-z}{12}$ ②

من ①، ②:

$\therefore \frac{x+y+z}{-2}=\frac{x+y-z}{12}$

$\therefore \frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{-2}{12}=\frac{-1}{6}$

---

13 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

اختبر نفسك حتى الدرس 1

الجزء (2)

1 ① $\frac{3}{5}$ ② 17 ③ 12 ④ 3:4 ⑤ 5a ⑥ 2

2 ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{8}{5}$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الثاني

س سؤال الدرس 2

1 ① 2 ② $\pm 8a^2b^2$ ③ 9 ④ ± 10

---

2 1 نفرض أن العدد هو x

$\therefore (1+x), (5+x), (17+x)$

∵ الأعداد متناسبة

$\therefore \frac{(1+x)}{(5+x)}=\frac{(5+x)}{(17+x)}$

$\therefore (1+x)(17+x)=(5+x)^2$ بالضرب التبادلى

$\therefore 17+18x+x^2=25+10x+x^2$

$\therefore 18x-10x=25-17$

$\therefore 8x=8$ $\qquad$ $\therefore \boxed{x=1}$ $\qquad$ ∴ العدد هو 1

2 نفرض أن العدد هو x

$\therefore (3-x), (7-x), (19-x)$

∵ الأعداد متناسبة

$\therefore \frac{(3-x)}{(7-x)}=\frac{(7-x)}{(19-x)}$

$\therefore (7-x)^2=(3-x)(19-x)$ بالضرب التبادلى

$\therefore 49-14x+x^2=57-22x+x^2$

$\therefore -14x+22x=57-49$

$\therefore 8x=8$ $\qquad$ $\therefore \boxed{x=1}$ $\qquad$ ∴ العدد هو 1

---

3 ∵ b وسط متناسب بين $(3-\sqrt{7})$ ، $(6+\sqrt{28})$

$\therefore b=\pm\sqrt{(6+\sqrt{28})(3-\sqrt{7})}$

$=\pm\sqrt{2(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\pm\sqrt{2(9-7)}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

---

4 ∵ b وسط متناسب بين a ، c فإن:

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k\ ,\ (k\neq 0)$

$\therefore a=ck^2\ ,\ b=ck$

$\left(\frac{b-c}{a-b}\right)^2=\left(\frac{ck-c}{ck^2-ck}\right)^2=\left[\frac{c(k-1)}{ck(k-1)}\right]^2=\frac{1}{k^2}$ ①

$\therefore \frac{c}{a}=\frac{c}{ck^2}=\frac{1}{k^2}$ ②

من ① ، ② نستنتج أن:

$\left(\frac{b-c}{a-b}\right)^2=\frac{c}{a}$

---

5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

6 ∵ a , b , c , d فى تناسب متسلسل

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k\ ,\ (k\neq 0)$

$a=dk^3\ ,\ b=dk^2\ ,\ c=dk$

$\therefore \frac{a+d}{b-c+d}=\frac{dk^3+d}{dk^2-dk+d}=\frac{d(k^3+1)}{d(k^2-k+1)}$

$=\frac{d(k+1)(k^2-k+1)}{d(k^2-k+1)}=k+1$ ①

$\therefore \frac{a-c}{b-c}=\frac{dk^3-dk}{dk^2-dk}=\frac{dk(k^2-1)}{dk(k-1)}$

$=\frac{dk(k-1)(k+1)}{dk(k-1)}=k+1$ ②

من ① ، ② نستنتج أن:

$\frac{a+d}{b-c+d}=\frac{a-c}{b-c}$

تدرب الدرس 2

التناسب المتسلسل:

1

1 $b^2=a\times c$	2 $\sqrt{ac}$	3 $3 , 9 , 27$	4 ± 4
5 36	6 12	7 1	8 3
9 $4x$	10 $\pm 4a^2b^2$	11 $\pm 2\sqrt{7}$	12 x^2y
13 4	14 3	15 9	16 $a=9c$
17 $c=4a$	18 $a:c$	19 125	20 65
21 $\frac{a^2}{b^2}$	22 2	23 32	

---

2 1

$\frac{4}{x}=\frac{x}{9}$

$\therefore x=\pm\sqrt{4\times 9}=\pm\sqrt{36}=\pm 6$

من 2 إلى 6 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

3 1

$\frac{x}{6}=\frac{6}{12}=\frac{12}{y}$

$x=\frac{6\times 6}{12}=\frac{36}{12}=3$

$y=\frac{12\times 12}{6}=\frac{144}{6}=24$

2

$\frac{x}{6}=\frac{6}{y}=\frac{y}{54}$

$6^2=xy \qquad \therefore xy=36$ (1)

$y^2=6\times 54=324$

$\therefore y=\pm\sqrt{324}=\pm 18$ (2)

بالتعويض عن قيم y فى المعادلة (1)

$\therefore y=18 \quad , \quad y=-18$

$\therefore x=\frac{36}{18}=2 \quad , \quad x=\frac{36}{-18}=-2$

$\therefore x=\pm 2$

3 ، 4 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

4 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

5 نفرض أن العدد هو x

$\therefore 6-x , 8-x , 12-x$

أعداد متناسبة

$\therefore \frac{6-x}{8-x}=\frac{8-x}{12-x}$

$(8-x)^2=(6-x)(12-x)$

$64-16x+x^2=72-18x+x^2$

$-16x+18x=72-64$

$2x=8$

$\therefore x=4$

∴ العدد هو 4

---

6 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

7 نفرض أن عدد السنتيمترات التى يجب طرحها x سم

∴ الأطوال: $12-x$ ، $9-x$ ، $7-x$ أطوالاً متناسبة

$\therefore \frac{7-x}{9-x}=\frac{9-x}{12-x}$

$\therefore (9-x)^2=(7-x)(12-x)$

$81-18x+x^2=84-19x+x^2$

$-18x+19x=84-81$

$\therefore x=3$

∴ عدد السنتيمترات هى 3 سم

---

8 1

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$\therefore a=ck^2 \quad , \quad b=ck$

$\therefore \frac{b^2}{c}=\frac{c^2k^2}{c}=ck^2=a$

2

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$a=ck^2 , b=ck$

$\frac{b-c}{a-b}=\frac{ck-c}{ck^2-ck}=\frac{c(k-1)}{ck(k-1)}=\frac{1}{k}$ (1)

$\frac{b}{a}=\frac{ck}{ck^2}=\frac{1}{k}$ (2)

∴ من (1) ، (2) ينتج أن الطرفين متساويان

3

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$a=ck^2 \quad , \quad b=ck$

$\frac{b}{b+c}=\frac{ck}{ck+c}=\frac{ck}{c(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ (1)

$\frac{a}{a+b}=\frac{ck^2}{ck^2+ck}=\frac{ck^2}{ck(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ (2)

∴ من (1) ، (2) ينتج أن الطرفين متساويان

من 4 إلى 7 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

9

$\frac{3}{x}=\frac{x}{y}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين = إحدى النسب

$\therefore \frac{3+x}{x+y}=\frac{3}{x}$

$\frac{3+x}{18}=\frac{3}{x}$

$(3+x)x=18\times 3$

$3x+x^2=54$

$x^2+3x-54=0$

$(x-6)(x+9)=0$

أ

$\therefore x=6$	$x=-9$
$\because y=18-x$	$y=18-x$
$\therefore y=18-6=12$	$y=18+9=27$

وبالتالى فإن: $x=-9 , y=27$ أو $x=6 , y=12$

---

10 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

11

$\blacktriangleright \frac{7}{x} = \frac{x}{\frac{1}{y}}$

$\blacktriangleright x^2 = \frac{7}{y} \Rightarrow x^2 y = 7$

$\therefore x^4 y^2 = 49$

12

$\blacktriangleright \frac{a}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{b} = k$

$\blacktriangleright a = 3k \quad , \quad 3 = 9k \quad , \quad 9 = bk$

$\because 3 = 9k \quad \Rightarrow \quad \therefore k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore a = 3k = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$\because 9 = bk \qquad \therefore b = \frac{9}{k} = 9 \div \frac{1}{3} = 9 \times 3 = 27$

$\therefore \boxed{a = 1} \quad , \quad \boxed{b = 27}$

---

13 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

14

$\therefore \frac{x}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{2y} = k$

$\therefore x = 2k \quad , \quad 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad , \quad 4 = 2yk \Rightarrow y = 4$

$\therefore x = 1 , y = 4$

$\therefore x + y = 1 + 4 = 5$

---

15 1

$\blacktriangleright \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore a = dk^3 , b = dk^2 , c = dk$

$\left(\frac{dk^3 + dk^2}{dk^2 + dk}\right)^3 = \left(\frac{dk^2 (k+1)}{dk(k+1)}\right)^3 = k^3$ ①

$\blacktriangleright \frac{a}{d} = \frac{dk^3}{d} = k^3$ ②

من ① ، ② نستنتج أن:

$\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^3 = \frac{a}{d}$

من 2 إلى 5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

16 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

17

$\therefore (a^2 + b^2) c^2 = b^2 (b^2 + c^2)$

$\therefore a^2 c^2 + b^2 c^2 = b^4 + b^2 c^2$

$\therefore b^4 = a^2 c^2 \qquad \therefore b^2 = ac$

∴ b وسط متناسب للعددين a ، c

TIMSS تفكير إبداعى

18 1 $a^2 : c^2$ 2 $a^3 : b^3$

---

19 ∵ b وسط متناسب بين a ، c

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore b = ck , a = ck^2$

$\blacktriangleright \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}} = \frac{c^3 k^6 + c^3 k^3 + c^3}{c^{-3} k^{-6} + c^{-3} k^{-3} + c^{-3}}$

$= \frac{c^3 (k^6 + k^3 + 1)}{c^{-3} k^{-6} (1 + k^3 + k^6)} = \frac{c^3}{c^{-3} k^{-6}} = c^6 k^6$ ①

$\because b^6 = c^6 k^6$ ②

من ① ، ②:

$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}} = b^6$

تقييم الأضواء (الوحدة الأولى)

1 1 $\frac{-7}{5}$ 2 m^2 3 6

4 3 5 ± 6 6 2

7 m 8 4 : 3 : 6 9 10

---

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تقييم الكتاب المدرسى (الوحدة الأولى)

1 1 $\frac{a-c}{d-b}$ 2 20 : 12 : 15

3 3 4 $\frac{x-y}{x+y}$

---

2 1 (2 , 8) أو (50 , −40) 2 48

3 9 4 ±12

---

3 1

$\blacktriangleright \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$a = k^3 d \quad , \quad b = k^2 d \quad , \quad c = kd$

$\therefore \frac{a - b}{a - 2b + c} = \frac{k^3 d - k^2 d}{k^3 d - 2k^2 d + kd} = \frac{k^2 d (k-1)}{kd (k^2 - 2k + 1)}$

$= \frac{k^2 d (k-1)}{kd (k-1)^2} = \frac{k}{k-1}$

$\therefore \frac{a+b+c}{a-d} = \frac{k^3 d + k^2 d + kd}{k^3 d - d} = \frac{dk (k^2 + k + 1)}{d (k^3 - 1)}$

$= \frac{k (k^2 + k + 1)}{(k-1)(k^2 + k + 1)} = \frac{k}{k-1}$

$\therefore \frac{a-b}{a-2b+c} = \frac{a+b+c}{a-d}$

2

$\blacktriangleright \frac{35}{15} = \frac{3}{2x+1}$

$35 (2x+1) = 45$

$7(2x+1) = 9$

$14x + 7 = 9$

$14x = 2 \qquad x = \frac{1}{7}$

3

$\blacktriangleright \because \frac{a+b}{25} = \frac{a-b}{11} = \frac{a+b-c}{8}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية

$\blacktriangleright \frac{a+b+a-b}{25+11} = \frac{2a}{36} = \frac{a}{18}$

بضرب حدى النسبة الثانية × (−1)، وجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية.

$\blacktriangleright \frac{a+b-a+b}{25-11} = \frac{2b}{14} = \frac{b}{7}$

بضرب حدى النسبة الثالثة × (−1)، وجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة.

$\blacktriangleright \frac{a+b-a-b+c}{25-8} = \frac{c}{17} \qquad \therefore \frac{a}{18} = \frac{b}{7} = \frac{c}{17}$

$\therefore a : b : c = 18 : 7 : 17$

4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الوحدة الثانية

الدرس الأول

س سؤال الدرس 1

1 1 $\because (x-2, 3) = (5, y+1)$

$\therefore x-2=5 \qquad \therefore x=5+2=7$

$\therefore y+1=3 \qquad \therefore y=3-1=2$

2 $\because (x^3+1, 15) = (-7, y^2-1)$

$\therefore x^3+1=-7 \qquad \therefore x^3=-7-1=-8$

$\therefore x=\sqrt[3]{-8}=-2$

$\therefore y^2-1=15 \qquad \therefore y^2=15+1=16$

$\therefore y=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

3 $\because (|x|, y^5) = (1, 32)$

$\therefore |x|=1 \qquad \therefore x=\pm 1$

$\therefore y^5=32 \qquad \therefore y^5=2^5 \qquad \therefore y=2$

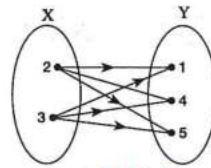
4 $\because (x+3, xy) = (5, -8)$

$\therefore x+3=5 \qquad \therefore x=5-3=2$

$\therefore 2y=-8 \qquad \therefore y=\frac{-8}{2}=-4$

2 1 $X\times Y=\{2,3\}\times\{1,4,5\}$

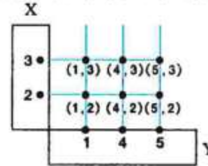
$=\{(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\}$



المخطط السهمى

2 $Y\times X=\{1,4,5\}\times\{2,3\}$

$=\{(1,2),(1,3),(4,2),(4,3),(5,2),(5,3)\}$



المخطط الديكارتى

3 $\varnothing\times Y=\varnothing\times\{1,4,5\}=\varnothing$

3 1 (أ) $X\times Y=\{1,2,5\}\times\{2,4\}$

$=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(5,2),(5,4)\}$

(ب) $Y\times X=\{2,4\}\times\{1,2,5\}$

$=\{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5)\}$

(جـ) $X^2=\{1,2,5\}\times\{1,2,5\}$

$=\{(1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2),(2,5),$

$(5,1),(5,2),(5,5)\}$

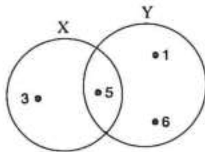
(د) $Y^2=\{2,4\}\times\{2,4\}$

$=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

التمثيل بمخطط سهمى راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 (أ) $X=\{3,5\}$

$Y=\{1,5,6\}$



(ب) $X\times(X\cap Y)=\{3,5\}\times\{5\}=\{(3,5),(5,5)\}$

4 1 (أ) 4 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 10

2 (أ) $R\times R, Q\times Q, Z\times Z$

(ب) $R\times R, Q\times Q, Z\times Z, N\times N$

(جـ) $R\times R, Q\times Q$

(د) $R\times R$

تدرب الدرس 1

الزوج المرتب:

1

1 11	2 1	3 1
4 5	5 (2,3)	6 11

2

1 $x=-5, y=9$	2 $x=-4, y=2$
3 $x=2, y=9$	4 $x=2, y=3$
5 $x=\pm2, y=-4$	6 $x=9, y=\pm2\sqrt{5}$

3

$\because 2a-3=4a$

$\therefore 2a=-3 \qquad \therefore a=\frac{-3}{2}$

$\because b+5=4 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore |2a-b|=|2\times\frac{-3}{2}-(-1)|$

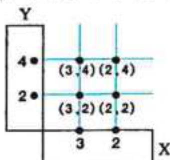
$|-3+1|=|-2|=2$

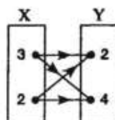
حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين ومجموعتين غير منتهيتين:

4

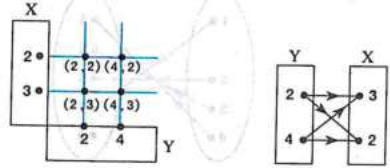
1 $\{(3,5)\}$	2 $\notin$	3 Y^2
4 $\varnothing$	5 $X=Y$	6 $\{4,9\}$
7 $\{4,9\}$	8 ±1	9 $\{(4,1)\}$
10 $\{(5,8)\}$	11 3	12 9
13 4	14 16	15 9
16 5	17 1	18 12
19 $\{1,2,3\}$	20 $R\times R$	21 $N\times N$

5 1 $X\times Y=\{(3,2),(3,4),(2,2),(2,4)\}$

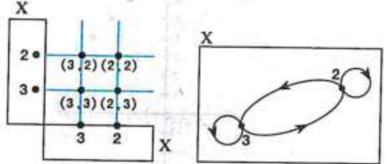




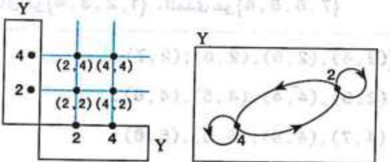
2 $Y \times X = \{(2,3),(2,2),(4,3),(4,2)\}$



3 $X^2 = \{(3,3),(3,2),(2,3),(2,2)\}$



4 $Y^2 = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$



من 6 إلى 8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

9 1 $(X \cap Y) \times Z = \{2,3\} \times \{7,2\}$

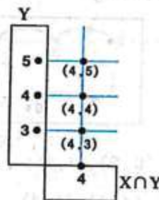
$= \{(2,7),(2,2),(3,7),(3,2)\}$

2 $(Z - Y) \times X = \{7\} \times \{1,2,3,4\}$

$= \{(7,1),(7,2),(7,3),(7,4)\}$

10 1 $(X \cap Y) \times Y = \{4\} \times \{3,4,5\}$

$= \{(4,3),(4,4),(4,5)\}$

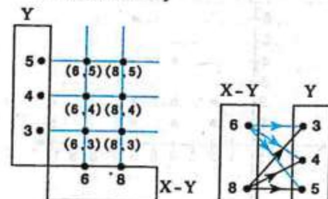


المخطط السهمى راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 $(X - Y) \times Y = \{6,8\} \times \{3,4,5\}$

$= \{(6,3),(6,4),(6,5),(8,3),$

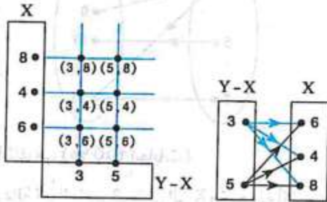
$(8,4),(8,5)\}$



3 $(Y - X) \times X = \{3,5\} \times \{6,4,8\}$

$= \{(3,6),(3,4),(3,8),(5,6),$

$(5,4),(5,8)\}$



من 11 إلى 17 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

TIMSS تفكير إبداعى

18 4

19 $X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),$

$(3,a),(3,b),(3,c)\}$

الأزواج المرتبة التى تحقق أن المسقط الأول عدد فردى والمسقط الثانى ليس b هى:

$(1,a),(1,c),(3,a),(3,c)$

عدد الأزواج المرتبة = 4 أزواج

20 $n(X \cup Y) = 3$

اختبر نفسك حتى الدرس 1

1 1) 1 2) $\pm 6(X^2 - Y^2)$ 3) 9 4) $R \times R$ 5) $\{(2,7)\}$ 6) 10

2 1) 2 2) 4 3) $\varnothing$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

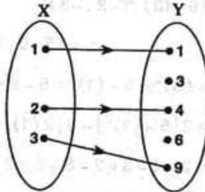
الدرس الثانى

س سؤال الدرس 2

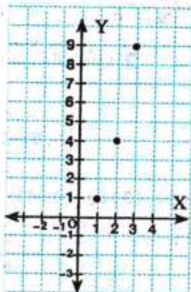
1 1 $R = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$

2 المجال هو $\{1,2,3\}$ ، المدى هو $\{1,4,9\}$

3

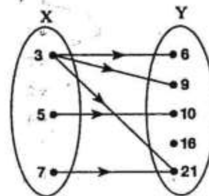


4



2 1 $\blacktriangleright R=\{(3,6),(3,9),(3,21),(5,10),(7,21)\}$

2



3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

4 R لا تمثل دالة لأن العنصر 3 ينتمى إلى X وخرج منه أكثر من سهم.

---

3 1 عند $x=0$ فإن: $f(0)=5-0=5$

عند $x=3$ فإن: $f(3)=5-3=2$

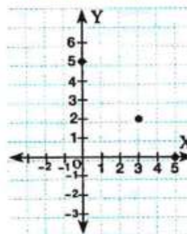
عند $x=5$ فإن: $f(5)=5-5=0$

$\therefore$ مدى الدالة هو $\{5,2,0\}$

2

x	0	3	5
$f(x)$	5	2	0

3



---

4 1 $\because f(x)=2x+1$

$\therefore f(2)=2(2)+1=5$

$f(4)=2(4)+1=9$

$f(6)=2(6)+1=13$

$f(-2)=2(-2)+1=-3$

مجموعة الأزواج المرتبة هى:

$\{(2,5),(4,9),(6,13),(-2,-3)\}$

المدى $=\{5,9,13,-3\}$

2 (أ) $\blacktriangleright f(3)+f(1)=5-(3)^2+5-(1)^2=5-9+5-1=0$

(ب) $\blacktriangleright 2f(1)-3g(1)=2[5-(1)^2]-3[2(1)]$

$=2\times4-3\times2=8-6=2$

(جـ) $\blacktriangleright \frac{f(2)}{g(3)}=\frac{5-(2)^2}{2(3)}=\frac{5-4}{6}=\frac{1}{6}$

تدرب الدرس 2

العلاقة:

1 1 $\{1,2,3\}$ 2 $\{7,8\}$

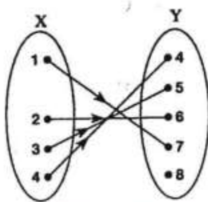
---

2 1 $\blacktriangleright R=\{(1,7),(2,6),(3,5),(4,4)\}$

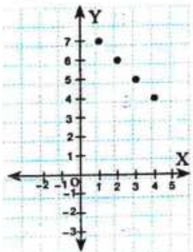
2

x	1	2	3	4
y	7	6	5	4

3



4



5 المجال هو $\{1,2,3,4\}$ ، المدى هو $\{7,6,5,4\}$

---

3 1 $\blacktriangleright R=\{(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),$
$(2,9),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(4,7),(4,9),(5,5),(5,6),$
$(5,7),(5,9),(7,7),(7,9)\}$

2 المجال هو $\{2,4,5,7\}$ ، المدى هو $\{4,5,6,7,9\}$

---

4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

5 1 $\blacktriangleright R=\{(2,\frac{-1}{2}),(3,\frac{-1}{3})\}$

2 المدى هو: $\{\frac{-1}{2},\frac{-1}{3}\}$

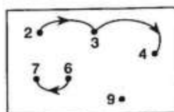
---

6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

7 1 $\blacktriangleright R=\{(2,3),(3,4),(6,7)\}$

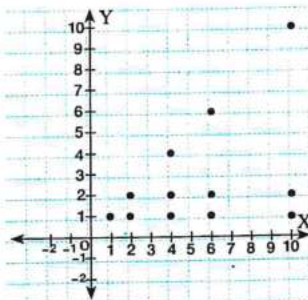
2



---

8 1 $\blacktriangleright R=\{(2,1),(4,2),(6,2),(1,1),$
$(10,2),(2,2),(4,4),(4,1),$
$(6,1),(6,6),(10,1),(10,10)\}$

2



9 1 $\blacktriangleright R=\{(1,18),(18,1),(2,9),(9,2),(3,6),(6,3)\}$

2

x	1	2	3	6	9	18
y	18	9	6	3	2	1

3 المجال هو: $\{1,2,3,6,9,18\}$

المدى هو: $\{1,2,3,6,9,18\}$

4 $\because mR9 \Rightarrow \therefore 9m=18$

$\therefore m=2$

5 $\because 6Rk \Rightarrow \therefore 6k=18$

$\therefore k=3$

الدالة:

10 1 X 2 المجال المقابل 3 المدى

4 Y 5 $\{1,2,4,5\}$ 6 (أ)

7 (د) 8 (ب) 9 $\{(1,7),(2,7),(5,7)\}$

10 7 11 6 12 $\{3,5\}$

13 $\{a\}$ 14 3 15 3

16 0 17 0 18 0

19 0 20 0 21 1

22 0 23 38

11 1 العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من x خرج منه سهم واحد فقط

2 العلاقة لا تمثل دالة، لأن الخط الرأسى عند $x=1$ يمر بأكثر من نقطة من النقاط الممثلة للعلاقة. (ظهر كمسقط أول أكثر من مرة)

3 العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من X خرج منه سهم واحد فقط فى المخطط السهمى

4 العلاقة لا تمثل دالة، لأن العنصر $1 \in X$ خرج منه أكثر من سهم واحد فى المخطط السهمى. (ظهر كمسقط أول أكثر من مرة)

12 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

13 1 $\blacktriangleright R=\{(3,1),(4,5),(5,6),(6,6)\}$

2

x	3	4	5	6
y	1	5	6	6

3 المجال هو: $\{3,4,5,6\}$ ، المدى هو: $\{1,5,6\}$

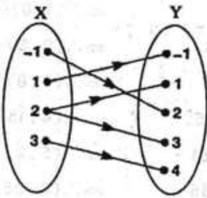
4 العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من عناصر X يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

14 1 $\blacktriangleright R=\{(-1,2),(1,-1),(2,3),(2,1),(3,4)\}$

2

x	−1	1	2	2	3
y	2	−1	3	1	4

3



4 المجال هو: $\{-1,1,2,3\}$ ، المدى هو: $\{2,-1,3,1,4\}$

5 العلاقة لا تمثل دالة، لأن الخط الرأسى عند $2 \in X$ يمر بأكثر من نقطة من النقاط الممثلة للعلاقة (العدد $2 \in X$ يظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة).

15، 16 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

17 1 $\blacktriangleright R=\{(2,5),(3,7),(4,9),(5,11)\}$

2 العلاقة R تمثل دالة، لأن كل عنصر من X ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة،

المدى هو: $\{5,7,9,11\}$ ، المجال هو: $\{2,3,4,5\}$

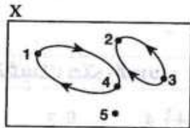
18 1 $\blacktriangleright R=\{(-2,3),(-3,8),(-4,15)\}$

2 العلاقة R تمثل دالة، لأن كل عنصر من X ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة،

المجال هو: $\{-4,-3,-2\}$، المدى هو: $\{3,8,15\}$

19 1 $\blacktriangleright R=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

2



3 العلاقة R لا تمثل دالة، لأن العنصر $5 \in X$ لم يظهر كمسقط أول فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

20 1 $R=\left\{(-1,-1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2\right)\right\}$

2 العلاقة R لا تمثل دالة، لأن العنصر $0 \in X$ لم يظهر كمسقط أول فى الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

21 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

22 $\because f(2)=2(2)^2-5(2)+2=0 \Rightarrow ①$

$، f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\frac{1}{2}\right)+2=0 \Rightarrow ②$

$\therefore$ من ①، ② نستنتج أن: $f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

23 1 $\blacktriangleright f(2)-2g(\sqrt{2})=(3-2)-2\left[(\sqrt{2})^2+4\right]=-11$

2 $\blacktriangleright f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})+\sqrt{3}=[3-\sqrt{3}]+\left[(\sqrt{3})^2+4\right]+\sqrt{3}=10$

24 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

25
▸ $f(1) = 1 - 1 = 0$ $\Rightarrow \therefore (1, 0) \in f$
▸ $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ $\Rightarrow \therefore (2, 3) \in f$
▸ $f(3) = 3^2 - 1 = 8$ $\Rightarrow \therefore (3, 8) \in f$
▸ $f(4) = 4^2 - 1 = 15$ $\Rightarrow \therefore (4, 15) \in f$
▸ $f(5) = 5^2 - 1 = 24$ $\Rightarrow \therefore (5, 24) \in f$
▸ $f(6) = 6^2 - 1 = 35$ $\Rightarrow \therefore (6, 35) \in f$
▸ $f = \{(1, 0), (2, 3), (3, 8), (4, 15), (5, 24), (6, 35)\}$
المدى هو : $\{0, 3, 8, 15, 24, 35\}$

TIMSS تفكير إبداعي

26 ◂ عندما $x = 10$
▸ $y = 5(10) = 50$ $\therefore (10, 50) \in R$
◂ عندما $x = 11$
▸ $y = 5(11) = 55$ $\therefore (11, 55) \in R$
◂ عندما $x = 12$
▸ $y = 5(12) = 60$ $\therefore (12, 60) \in R$
◂ عندما $x = 13$
▸ $y = 5(13) = 65$ $\therefore (13, 65) \in R$
$\therefore R = \{(10, 50), (11, 55), (12, 60), (13, 65), (14, 70), (15, 75), (16, 80), (17, 85), (18, 90), (19, 95)\}$
∴ عدد عناصر R يساوى 10 عناصر

27
$\because (1, n) \in R$
$\therefore n = 1 + 4$ $\therefore n = 5$
$\because (2, m) \in R$
$\therefore m = 2 + 4$ $\therefore m = 6$
∴ المدى = $\{5, 6, 7\}$

اختبر نفسك حتى الدرس 2

1 1 7 2 21 3 6 4 $\{4\}$ 5 0
6 $\{(2, 6), (3, 7), (5, 9)\}$

2 1 $\{1, 2, 4, 6\}$ 2 $\{(2, 2)\}$ 3 6

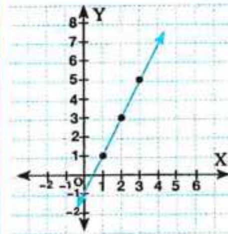
3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الثالث

س سؤال الدرس 3

1 $f(x) = 2x - 1$

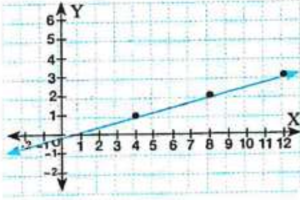
x	1	2	3
$f(x)$	1	3	5



◂ نقطة التقاطع مع محور X هى $(\frac{1}{2}, 0)$
◂ نقطة التقاطع مع محور Y هى $(0, -1)$

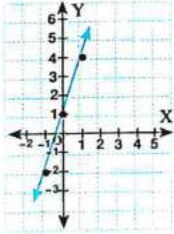
2 1 (أ) $f(x) = \frac{1}{4}x$

x	4	8	12
$f(x)$	1	2	3



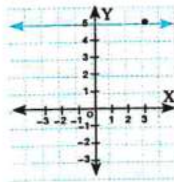
(ب) $g(x) = 3x + 1$

x	−1	0	1
$g(x)$	−2	1	4



2 ∵ المستقيم يمر بالنقطة $(a, 2a)$
$\therefore f(a) = 2a$
$\therefore 2a = 3a - 6$ $\therefore a = 6$
$\because f(0) = 3(0) - 6 = -6$
∴ نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور Y هى $(0, -6)$

3
▸ $f(x) = 5$
◂ f دالة ثابتة توازى محور X
◂ ∵ المستقيم يمر بالنقطة $(3, 5)$
▸ $\therefore k = 5$



4 1 ∵ المستقيم يمر بالنقطة $(2, 3)$
$\therefore f(2) = 3$ $\therefore 3 = 2b + 7$
$\therefore 2b = -4$ $\therefore b = -2$
$\therefore f(x) = -2x + 7$
$\therefore f(-2) = -2(-2) + 7 = 4 + 7 = 11$

2
$\because f(x) = 3x + 5$
من الجدول
$\therefore f(a) = 20$
$\therefore 3a + 5 = 20$ $\therefore 3a = 15$
$\therefore a = 5$
$\because f(b) = 26$
$\therefore 3b + 5 = 26$ $\therefore 3b = 21$
$\therefore b = 7$ $\therefore a + b = 5 + 7 = 12$

3
$\because f(x) = 12 + 5.5x$
$\therefore f(15) = 12 + 5.5(15) = 94.5$
∴ تكلفة شحن طرد وزنه 15 كيلو جرام = 94.5 جنيه.

تدرب الدرس 3

الدالة الخطية:

1 (1) $(0, b)$ (2) $(0, 6)$ (3) $(4, 0)$

(4) (1) (5) $f(x) = 2x$ (6) $(0, 0)$

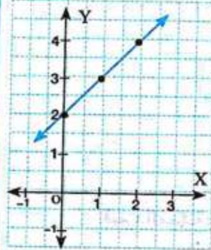
(7) $f(x) = -3x + 5$ (8) $(1, 3)$ (9) $f(x) = 9 - x$

2 (1) عندما $x = 0$ $f(0) = 0 + 2 = 2$

عندما $x = 1$ $f(1) = 1 + 2 = 3$

عندما $x = 2$ $f(2) = 2 + 2 = 4$

x	0	1	2
y	2	3	4



(2) إلى (6) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

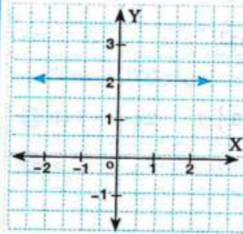
الدالة الثابتة:

3 (1) يوازى محور X (2) محور X (3) الصفرية

(4) $(0, 7)$ (5) 5 (6) 6

(7) 1 (8) $\frac{1}{2}$

4 (1) $f(x) = 2$



(2) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تطبيقات الدالة الخطية:

5 (1) 3 (2) 6 (3) 4 (4) -1

(5) 7 (6) 7 (7) 12

6 $\because f(k) = 11$

$\therefore 2k + 3 = 11 \Rightarrow \therefore k = 4$

7 $\because f(2) = 2k$

$\therefore 5(2) + 4 = 2k$

$14 = 2k \Rightarrow k = 7$

8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

9 ∵ الخط المستقيم يمر بالنقطة $(m, 3m)$

$\therefore 3m = \frac{2}{3}m - 7$ بالضرب × (3)

$\therefore 9m = 2m - 21$

$\therefore 7m = -21 \Rightarrow m = -3$

لإيجاد نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور Y نضع $x = 0$

$\therefore f(x) = \frac{2}{3}(0) - 7 = -7$

∴ النقطة هى $(0, -7)$

10، 15 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تفكير إبداعى TIMSS

16 من الجدول بالتعويض بالنقطة $(5, -7)$ فى الدالة f

$\therefore -7 = 5m + 3$ $\therefore m = -2$

∴ الدالة f تكون قاعدتها $f(x) = -2x + 3$

لإيجاد نقطة تقاطع الدالة g مع محور Y نضع $x = 0$

$\therefore g(x) = b$

نستنتج قيمة b من جدول الدالة f

$\therefore b = -2(11) + 3 = -19$

∴ نقطة التقاطع هى $(0, -19)$

17 $\because f(a) = 0$

$\therefore 4 - 2a = 0 \Rightarrow \therefore a = 2$

$\therefore f(0) = b \Rightarrow \therefore 4 - 2(0) = b$

$\therefore b = 4$

◄ مساحة سطح المثلث تساوى 4 وحدات مربعة.

(لأن: $\frac{1}{2}(2) \times (4) = 4$)

اختبر نفسك حتى الدرس 3

1 (1) 0 (2) -2 (3) $(0, -1)$

(4) $(0, 5)$ (5) -4 (6) 7 وحدة طول

2 (1) $(0, 0)$ (2) 4 (3) $\{2, 4, 6\}$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الرابع

س سؤال الدرس 4

1 (1) $\because \sqrt{3}x - 1 = 2$

$\therefore \sqrt{3}x = 2 + 1$

$\therefore \sqrt{3}x = 3 \Rightarrow x = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

∴ م.ح = $\{\sqrt{3}\}$

(2) $\because 2x + 5 = 3$

$\therefore 2x = 3 - 5 \Rightarrow 2x = -2$

$\therefore x = -1$

∴ م.ح = $\{-1\}$

(3) $4 - \sqrt{5}x = |-9|$

$\therefore 4 - \sqrt{5}x = 9$

$\therefore -\sqrt{5}x = 9 - 4 \Rightarrow -\sqrt{5}x = 5$

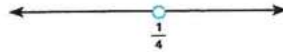
$\therefore x = \frac{5 \times \sqrt{5}}{-\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

∴ م.ح = $\{-\sqrt{5}\}$

② 1

$\because x+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$

$\therefore x>\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow x>\frac{1}{4}$



$\therefore$ م.ح $=\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$

2

$\because 2(3x+7)<x-11$

$\therefore 6x+14<x-11$

$\therefore 6x-x<-11-14$

$\therefore 5x<-25 \quad \Rightarrow x<-5$



$\therefore$ م.ح $=]-\infty, -5[$

3

$\because \frac{x-1}{5}-\frac{x+2}{6} \geqslant \frac{7}{15}$

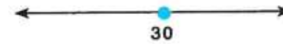
$\therefore \frac{6(x-1)}{6\times 5}-\frac{5(x+2)}{5\times 6} \geqslant \frac{2\times 7}{2\times 15}$

$\frac{6x-6}{30}-\frac{5x+10}{30} \geqslant \frac{14}{30}$

$\therefore 6x-6-5x-10 \geqslant 14$

$x-16 \geqslant 14$

$\therefore x \geqslant 30$



$\therefore$ م.ح $=[30, \infty[$

4

$\because (2x+3)-6x>-5x+1$

$\therefore 2x+3-6x>-5x+1$

$\therefore 2x-6x+5x>1-3$

$x>-2$

$\therefore$ م.ح $=]-2, \infty[$



③ 1 (أ) $]-7, 2[$ (ب) $[-1, 3[$ (جـ) $9>x>-9$

2

$\because -10<2-3x \leqslant 2$

$\therefore -10-2<-3x \leqslant 2-2$

$\therefore -12<-3x \leqslant 0$

$\frac{-12}{-3}>x \geqslant \frac{0}{-3} \quad \Rightarrow 4>x \geqslant 0$

$\therefore 0 \leqslant x<4$



$\therefore$ م.ح $=[0, 4[$

④ 1 $\because \angle B$ منفرجة

$\therefore 90^\circ<m(\angle B)<180^\circ$

$\therefore 90<5x<180$

$\therefore \frac{90}{5}<x<\frac{180}{5}$

$18<x<36$

$\therefore$ قيم x الممكنة: $x \in]18, 36[$

2 $\because \angle A$ حادة

$\therefore 0^\circ<m(\angle A)<90^\circ$

$\therefore 0<3x-6<90$

$\therefore 0+6<3x<90+6$

$6<3x<96$

$\therefore \frac{6}{3}<x<\frac{96}{3}$

$\therefore 2<x<32$

$\therefore$ قيم x الممكنة: $x \in]2, 32[$

3

$\therefore |20-13|<(2x+3)<20+13$

$\therefore 7<2x+3<33$

$\therefore 7-3<2x<33-3$

$4<2x<30$

$2<x<15$

$\therefore$ قيم x الممكنة: $x \in]2, 15[$

تدرب الدرس 4

معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

① 1 $2x-4=3$ 2 $\{3\sqrt{3}\}$ 3 $\{2\sqrt{3}\}$ 4 $\{\sqrt{2}\}$

② 1

$\because x-1=4$

$\therefore x=4+1$

$\therefore x=5$

$\therefore$ م.ح $=\{5\}$

2

$\because 3x+2=11$

$\therefore 3x=11-2$

$\therefore 3x=9$

$\therefore x=\frac{9}{3} \quad \therefore x=3$

$\therefore$ م.ح $=\{3\}$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

4

$\because 5x-\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

$\therefore 5x=4\sqrt{5}+\sqrt{5}$

$\therefore 5x=5\sqrt{5}$

$\therefore x=\frac{5\sqrt{5}}{5} \quad \therefore x=\sqrt{5}$

$\therefore$ م.ح $=\{\sqrt{5}\}$

5 إلى 7 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

8

$\because\ 3(x+7)-5x=x+12$

$\therefore\ 3x+21-5x=x+12$

$\therefore\ 3x-5x-x=12-21$

$\therefore\ -3x=-9$

$\therefore\ x=\frac{-9}{-3}$ $\quad x=3$

$\therefore$ م.ح $=\{3\}$

9

$\because \sqrt{3}x-3=0$

$\therefore \sqrt{3}x=3$

$\therefore x=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x=\frac{3\sqrt{3}}{3}$ $\quad \therefore x=\sqrt{3}$

$\therefore$ م.ح $=\{\sqrt{3}\}$

10 إلى 12 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

13

$\because\ 2(\sqrt{3}x-7)+1=5(\sqrt{3}x-1)-2$

$\therefore\ 2\sqrt{3}x-14+1=5\sqrt{3}x-5-2$

$\therefore\ 2\sqrt{3}x-5\sqrt{3}x=-5-2+14-1$

$\therefore\ -3\sqrt{3}x=6$

$\therefore x=\frac{6}{-3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{6\sqrt{3}}{-3\times3}$

$\therefore x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ م.ح $=\left\{\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right\}$

متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد:

3 1 أولًا: $<$ ثانيًا: $>$ ثالثًا: $<$ رابعًا: $>$

2 $0.4t-7<2t$ 3 $x\geqslant 5$ 4 $x<3$

5 $]-\infty,7[$ 6 $[-1,5[$ 7 $-1<x<2$

8 $]-1,3[$ 9 $[3,\infty[$ 10 $]-5,3[$

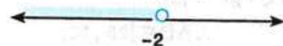
11 $]-1,5]$ 12 $7>x>-7$

4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

5 1

$\because x+5<3$

$\therefore x<3-5$ $\quad \therefore x<-2$



$\therefore$ م.ح $=]-\infty,-2[$

2

$\because 5x\geqslant 20$

$\therefore x\geqslant\frac{20}{5}$ $\quad \therefore x\geqslant 4$



$\therefore$ م.ح $=[4,\infty[$

3 إلى 11 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

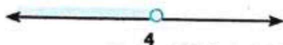
6 1

$\because 5x-3<2x+9$

$\therefore 5x-2x<9+3$

$\therefore 3x<12$ $\quad \therefore x<\frac{12}{3}$

$\therefore x<4$



$\therefore$ م.ح $=]-\infty,4[$

2 إلى 8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

7 إلى 10 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تفكير إبداعى TIMSS

11 1 $\because$ محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

$\therefore (2x-4+10)\times 2=52$

$\therefore (2x+6)\times 2=52$

$\therefore 4x+12=52$

$\therefore 4x=52-12$

$\therefore 4x=40 \Rightarrow x=\frac{40}{4}$

$\because x=10$

2 $\therefore (2x-4+10)\times 2>40$

$\therefore (2x+6)\times 2>40$

$\therefore 4x+12>40$

$\therefore 4x>40-12$

$\therefore 4x>28 \Rightarrow x>\frac{28}{4}$

$\therefore x>7$

أى أن: $x\in]7,\infty[$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

12 ، 13 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تقييم الأضواء (الوحدة الثانية)

1 1 $]-\infty,-3[$ 2 6   3 7

4 $-24\sqrt{2}$ 5 4   6 $(2,0)$

7 -1 8 $]-5,3[$ 9 -3

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تقييم الكتاب المدرسى (الوحدة الثانية)

1 1 $\{2,6,9\}$ 2 9   3 8   4 $\frac{2}{7}$

2 1 2   2 $]6,\infty[$ 3 24   4 $(\frac{9}{2},0)$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الوحدة الثالثة

الدرس الأول

س سؤال الدرس 1

1 فى المثلث BDC:

$\because BD = DC$

$\therefore m(\angle DBC) = m(\angle DCB) \Rightarrow ①$

فى المثلث ABC:

$\because m(\angle ABC) > m(\angle ACB) \Rightarrow ②$

من ① و ② نستنتج أن:

$m(\angle ABC) - m(\angle DBC) > m(\angle ACB) - m(\angle DCB)$

$\therefore m(\angle ABD) > m(\angle ACD)$

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

3

$\because \overline{AD} \perp \overline{CB}$

$\therefore m(\angle ADC) = m(\angle ADB) = 90^\circ$

فى المثلث ABD و المثلث ACD

$\because m(\angle BAD) + m(\angle B) = 90^\circ$

$\therefore \angle B$ تتمم $\angle BAD \Leftarrow ①$

$\because m(\angle CAD) + m(\angle C) = 90^\circ$

$\therefore \angle C$ تتمم $\angle CAD \Leftarrow ②$

$\because m(\angle BAD) < m(\angle CAD) \Rightarrow ③$

من ① و ② و ③ نستنتج أن:

$\therefore m(\angle B) > m(\angle C)$

4 فى المثلث AMB

$MA + MB > AB \Rightarrow ①$

فى المثلث CMB

$MB + MC > CB \Rightarrow ②$

فى المثلث AMC

$MC + MA > AC \Rightarrow ③$

بجمع ① و ② و ③ نستنتج أن:

$2(MA + MB + MC) > AC + CB + AB$

$\therefore 2(MA + MB + MC) >$ محيط المثلث ABC

تدرب الدرس 1

مسلمات التباين:

1 1 (أ) > (ب) > (جـ) < (د) < (هـ) >

2 > 3 <

4 (أ) > (ب) < (جـ) >

5 > 6 <

2 فى المثلث ABD

$\because AD = AB$

$\therefore m(\angle ABD) = m(\angle ADB) \Rightarrow ①$

$\because m(\angle DBC) < m(\angle CDB) \Rightarrow ②$

من ① و ② نستنتج أن:

$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) < m(\angle ADB) + m(\angle CDB)$

$m(\angle ABC) < m(\angle ADC)$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

4 فى المثلث BCD

$\because BD = DC$

$\therefore m(\angle DBC) = m(\angle DCB) \Rightarrow ①$

$\because m(\angle ABC) < m(\angle ACB) \Rightarrow ②$

من ① و ② نستنتج أن:

$m(\angle ABC) - m(\angle DBC) < m(\angle ACB) - m(\angle DCB)$

$\therefore m(\angle ABD) < m(\angle ACD)$

$\therefore m(\angle ACD) > m(\angle ABD)$

5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

6 1 زاوية خارجة عن المثلث ① $\Rightarrow m(\angle 1) > m(\angle 3)$

زاويتان متقابلتان بالرأس ② $\Rightarrow m(\angle 3) = m(\angle 2)$

من ① و ② نستنتج أن:

$m(\angle 1) > m(\angle 2)$

2 زاوية خارجة عن المثلث ① $\Rightarrow m(\angle 1) > m(\angle 4)$

بالتبادل ② $\Rightarrow m(\angle 2) = m(\angle 4)$

من ① و ② نستنتج أن:

$m(\angle 1) > m(\angle 2)$

3 $\because m(\angle 1) + x^\circ = 90^\circ$

$\therefore m(\angle 1) = 90^\circ - x^\circ \Rightarrow ①$

$\because m(\angle 2) + (2x)^\circ$

$\therefore m(\angle 2) = 90^\circ - (2x)^\circ \Rightarrow ②$

من ① و ② نستنتج أن:

$\therefore m(\angle 1) > m(\angle 2)$

7 ، **8** راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

9 1 > 2 < 3 AC > BD 4 <

5 $m(\angle ACD) < m(\angle ABD)$

6 $m(\angle 1) > m(\angle 2) > m(\angle 3)$

7 > 8 MC > MB

10 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)



11 ◄ مجموعة القيم التى تمثل طول $\overline{AC}$

$|12.5 - 5.5| < AC < 12.5 + 5.5$

$7 < AC < 18$ $\therefore AC \in]7, 18[$

◄ مجموعة القيم التى تمثل طول $\overline{AD}$

$\sqrt{7^2 + 24^2} < AD < \sqrt{24^2 + 18^2}$

$25 < AD < 30$ $\therefore AD \in]25, 30[$

اختبر نفسك حتى الدرس 1

1 1 < 2 < 3 >

4 > 5 −1

2 1 > 2 قياس أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها

3 3

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الثاني

س سؤال الدرس 2

الجزء (1)

1
$\because SP < TP$
$\therefore m(\angle T) < m(\angle S)$
$\because TP < ST$
$\therefore m(\angle S) < m(\angle P)$
$\therefore m(\angle T), m(\angle S), m(\angle P)$

---

2 في ΔABC
$\because AB > BC$
$\therefore m(\angle BCA) > m(\angle CAB) \Rightarrow ①$
في ΔACD
$\because AD > CD$
$\therefore m(\angle DCA) > m(\angle CAD) \Rightarrow ②$
بجمع ① و② ينتج أن:
$m(\angle BCA) + m(\angle DCA) > m(\angle CAB) + m(\angle CAD)$
$\therefore m(\angle BCD) > m(\angle BAD)$

3
$\because YB > XC \Rightarrow ①$
$, AY = AX \Rightarrow ②$
من ① و② ينتج أن:
$YB + AY > XC + AX$
$\therefore AB > AC$
في ΔACB
$\because AB > AC$
$\therefore m(\angle C) > m(\angle B)$

---

4 ∵ مجموع قياسات زوايا ΔABC الداخلة $= 180^\circ$
$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - (40^\circ + 50^\circ)$
$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
$\because m(\angle B) < m(\angle A)$
$\therefore AC < BC$
$\because m(\angle A) < m(\angle C)$
$\therefore BC < AB$
$\therefore AC < BC < AB$

---

5 $\because \overline{BC} // \overrightarrow{AD}$ ، $\overline{AB}$ قاطع لهم
$\therefore m(\angle B) = m(\angle DAB) = 42^\circ$ (بالتبادل داخليًا)
∵ مجموع قياسات زوايا ΔABC الداخلة $= 180^\circ$
$\therefore m(\angle BAC) = 180^\circ - (68^\circ + 42^\circ) = 70^\circ$
$\because m(\angle BAC) > m(\angle B)$
$\therefore BC > AC$

6
$\because m(\angle BCD) = 180^\circ$
$\therefore m(\angle ACB) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$
$\because m(\angle ABE) = 180^\circ$
$\therefore m(\angle ABC) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$
في ΔABC
$\therefore m(\angle ACB) > m(\angle ABC)$
$\therefore AB > AC$

---

7 1
$\because BD > AB$
$\therefore y > 35$
$\because m(\angle A) + m(\angle D) < 180^\circ$
$\therefore y + 35 < 180$
$y < 180 - 35$
$\therefore y < 145$
$\therefore 35 < y < 145$
$\therefore y \in]35,145[$

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تدرب الدرس 2

الجزء (1)

التباين فى المثلث:

1
1 $>$ 2 $>$ 3 $<$ 4 $>$
5 $<$ 6 $>$ 7 $>$
8 $XZ > ZY$ 9 $AB > AC$ 10 جميع ما سبق 11 $\overline{AB}$

2
1 زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.
2 ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الأخرى.
3 $\overline{BC}$ 4 $\overline{XY}$ 5 $\overline{AB}$
6 $\overline{DB}$ 7 $\overline{YZ}$

3
1 ► $m(\angle A), m(\angle B), m(\angle C)$
2 ► $m(\angle B), m(\angle A), m(\angle C)$

4
1 ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= 180^\circ$
$\therefore m(\angle Z) = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ) = 70^\circ$
► XY, ZY, XZ

2 ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= 180^\circ$
$\therefore m(\angle Y) = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ) = 40^\circ$
► YZ, XZ, XY

5
1 ► $m(\angle B), m(\angle A), m(\angle C)$
2 ► $m(\angle F), m(\angle D), m(\angle E)$
3 ► $m(\angle C), m(\angle A), m(\angle B)$

6 1 ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخله للمثلث = 180°

$\therefore m(\angle C) = 180^\circ - (43^\circ + 58^\circ) = 79^\circ$

► $BC < AC < AB$

2 ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = 180°

$\therefore x^\circ + 2x^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$3x^\circ = 180^\circ - 90^\circ$

$3x^\circ = 90^\circ$ $\qquad \therefore x = 30$

$\therefore m(\angle S) = 30^\circ , m(\angle T) = 60^\circ$

► $TP < SP < ST$

3 ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = 180°

$\therefore m(\angle F) = 180^\circ - (120 + 25^\circ) = 35^\circ$

► $RF < TR < TF$

---

7 العمل: ارسم $\overline{FY}$



البرهان: فى المثلث FXY

$\because FX > XY$

$\therefore m(\angle XYF) > m(\angle XFY)$ ⇒ ①

فى المثلث ZYF

$\because ZF > ZY$

$\therefore m(\angle FYZ) > m(\angle YFZ)$ ⇒ ②

بجمع ① و② ينتج أن:

$m(\angle XYZ) > m(\angle XFZ)$

---

8 فى المثلث ADF

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\therefore m(\angle AFD) = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = 45^\circ$

$\because \overline{DF} \parallel \overline{BC}$

$\therefore m(\angle B) = m(\angle ADF) = 70^\circ$ } بالتناظر

$\therefore m(\angle C) = m(\angle AFD) = 45^\circ$ }

$\because m(\angle B) > m(\angle C)$

$\therefore AC > AB$

---

9 ∵ D ، E منتصفا $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ على الترتيب

$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore m(\angle ADE) = m(\angle B)$ } بالتناظر

$\therefore m(\angle AED) = m(\angle C)$ }

$\because AD > AE$

$\therefore m(\angle AED) > m(\angle ADE)$

$\therefore m(\angle C) > m(\angle B)$

---

10 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

11 $\because XZ > XY$

$\therefore m(\angle XYZ) > m(\angle XZY)$

∵ $\overrightarrow{YM}$ ينصف $\angle XYZ$ ، $\overrightarrow{ZM}$ ينصف $\angle XZY$

$\therefore \frac{1}{2} m(\angle XYZ) > \frac{1}{2} m(\angle XZY)$

$\therefore m(\angle MYZ) > m(\angle MZY)$

---

12 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

13 $\because XY = XZ$

$\therefore m(\angle XYZ) = m(\angle XZY)$ ⇒ ①

$\because FZ > FY$

$\therefore m(\angle FYZ) > m(\angle FZY)$ ⇒ ②

من ① و② ينتج أن:

$\therefore m(\angle XYZ) - m(\angle FYZ) < m(\angle XZY) - m(\angle FZY)$

$\therefore m(\angle XZF) > m(\angle XYF)$

---

14 $\because AB > AC$

$\therefore m(\angle C) > m(\angle B)$ ⇒ ①

$\because DA = DC$

$\therefore m(\angle DAC) = m(\angle C)$ ⇒ ②

$\because DA = DB$

$\therefore m(\angle BAD) = m(\angle B)$ ⇒ ③

من ① و② و③ ينتج أن:

$\therefore m(\angle BAD) < m(\angle CAD)$

---

15 فى ΔABC:

$\because AC + BC > 15$

$\therefore x + 12 + 2x - 6 > 15$

$\therefore 3x + 6 > 15$ $\qquad \therefore 3x > 15 - 6$

$\therefore 3x > 9$ $\qquad \therefore x > 3$

$\because m(\angle A) < m(\angle B)$

$\therefore BC < AC$ $\qquad \therefore 2x - 6 < x + 12$

$\therefore 2x - x < 12 + 6$ $\qquad \therefore x < 18$

$\therefore 3 < x < 18$

$\therefore x \in]3 , 18[$

---

16 $\because TP > ST$ $\qquad \therefore x > 50$

$\because m(\angle S) + m(\angle P) + m(\angle T) = 180^\circ$

$\therefore m(\angle S) + m(\angle P) < 180^\circ$

$\therefore x + 50 < 180$

$\therefore x < 180 - 50$ $\qquad \therefore x < 130$

$\therefore 50 < x < 130$

$\therefore x \in]50 , 130[$

س سؤال الدرس 2

الجزء (2)

1 $\because XM = XY$, $XZ = XZ$ ضلع مشترك

$\because m(\angle ZXY) > m(\angle MXZ)$

$\therefore ZY > MZ$

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تدرب الدرس 2

الجزء (2)

التباين فى مثلثين:

1 > 1 < 2 < 3

< 4 > 5 > 6

2 $\because$ مجموع قياسات زوايا ΔABC الداخلة $= 180^\circ$

$\therefore m(\angle A) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\because ED = AB$, $EF = AC$

$\because m(\angle DEF) < m(\angle CAB)$

$\therefore FD < CB$

3 $\because AB = BC$, $BD = BD$ ضلع مشترك

$\because AD > CD$

$\therefore m(\angle ABD) > m(\angle CBD)$

4 $\because$ ABCD متوازى أضلاع

$\therefore AM = MC$, $DM = MB$

فى المثلثين BMC و AMB

$\because AM = MC$, $MB = MB$ ضلع مشترك

$\because AB > BC$

$\therefore m(\angle AMB) > m(\angle CMB)$

5 $\because DC = AB$, $BD = BD$ ضلع مشترك

$\because BC < AD$

$\therefore m(\angle CDB) < m(\angle ABD)$

6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

7 $\because BC = CD$, $AC = AC$ ضلع مشترك

$\because m(\angle BCA) < m(\angle ACD)$ $\therefore AB < AD$

$\therefore 2x - 8 < x + 6$ $\therefore 2x - x < 6 + 8$ $\therefore x < 14$

$\because AB > 0$ $\therefore 2x - 8 > 0$

$\therefore 2x > 8$ $\therefore x > 4$

$\because AD = x + 6$, $x > 4$

$\therefore AD > 0$ محققة لجميع قيم x حيث $x > 4$

$\therefore 4 < x < 14$ $\therefore x \in]4 , 14[$

8 ، 9 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

17 $\because AB > AC$

$\therefore m(\angle C) > m(\angle B)$

$\therefore x + 2 > 40$ $\therefore x > 38$

$\because x + 2 + 40 < 180$ $\therefore x < 138$

$\therefore 38 < x < 138$

$\therefore x \in]38 , 138[$

18 $\because m(\angle A) > m(\angle B)$

$\therefore CB > CA$ $\therefore x > 3$

$\because AC + AB > CB$ (متباينة المثلث)

$\therefore 3 + 5 > x$ $\therefore 8 > x$

$\therefore 3 < x < 8$

$\therefore x \in]3 , 8[$

19 $m(\angle ABC) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$

$\therefore AC > BC$

$\therefore$ التقاطع B أقرب إلى C

تفكير إبداعى TIMSS

20 $\because AD > DB$

$\therefore m(\angle B) > m(\angle BAD)$ $\Rightarrow$ ①

$\because \overline{AD}$ متوسط

$\therefore CD = DB$

$\therefore m(\angle C) > m(\angle CAD)$ $\Rightarrow$ ②

من ① و ② ينتج أن:

$\therefore m(\angle B) + m(\angle C) > m(\angle BAC)$

$\therefore (\angle BAC)$ حادة

21 العمل والبرهان: نرسم $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ويقطع $\overline{AC}$ فى E

فى المثلثان ABD , AED

$\because m(\angle BAD) = m(\angle EAD)$ $\Rightarrow$ ①

، $m(\angle B) = m(\angle EAD) = 90^\circ$ $\Rightarrow$ ②

، $AD = AD$ ضلع مشترك $\Rightarrow$ ③

من ① و ② و ③

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta AED$

$\therefore BD = ED$

فى المثلث DEC القائم الزاوية فى E

$\because DC > ED$

$\therefore DC > BD$

اختبر نفسك حتى الدرس 2

الجزء (1)

راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تفكير إبداعى TIMSS

10 $\because AD = AB \;,\; AC = AC$ ضلع مشترك

$\because DC < CB$

$\therefore m(\angle DAC) < m(\angle CAB)$ $\therefore 3x - 18 < 2x + 36$

$\therefore 3x - 2x < 36 + 18$ $\therefore x < 54$

$\because m(\angle DAC) > 0$

$\therefore 3x - 18 > 0$ $\therefore 3x > 18$

$\therefore x > 6$

$\therefore m(\angle CAB) > 0$ محققة دائمًا لجميع قيم x حيث $x > 6$

$\therefore 6 < x < 54$ $\therefore x \in]6 , 54[$

اختبر نفسك حتى الدرس 2

الجزء (2)

1 > 1 < 2 > 3 2 4

2 1 يقابلها ضلع أكبر فى الطول من نظيره فى المثلث الآخر. 2 $\{1 , 2\}$

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الثالث

س سؤال الدرس 3

الجزء (1)

1 المسقط هو $\overline{AC}$

$AC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{AC}$ = 3 سم

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تدرب الدرس 3

الجزء (1)

المساقط العمودية:

1

1 $\{B\}$	2 $\perp$	3 $//$	4 $\geq$	5 $\{y\}$
6 $\{B\}$	7 $\overline{DA}$	8 $\overline{ZL}$	9 $=$	10 $\overline{FY}$
11 $\overline{DB}$	12 $\overline{DC}$	13 $\overline{BA}$		

2 1 $\overline{BC}$ ، $\overline{XC}$ 2 $\{B\}$ ، $\overline{XB}$

3 $\overline{AB}$ ، $\overline{AY}$

3 1 $\overline{BD}$ 2 $\overline{AH}$ 3 $\{H\}$

4 $\{B\}$ 5 $\{B\}$ 6 $\{H\}$

4 1 $\overline{MB}$ 2 $\overline{MD}$ 3 $\{M\}$ 4 $\overline{AM}$

5 مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\overline{BA}$

فى المثلث ADE

$\because m(\angle A) = 90^\circ$

$\therefore EA = \sqrt{(5)^2 - (3)^2} = 4$ من نظرية فيثاغورس

فى المثلث CBE

$\because m(\angle B) = 90^\circ$

$\therefore BE = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} = 8$ من نظرية فيثاغورس

$\because BA = BE + EA$ $\therefore BA = 8 + 4 = 12$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{CD}$ على $\overleftrightarrow{AB}$ يساوى 12 سم

6 ، 7 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

8 1 $\because$ مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو $\overline{DC}$

$\therefore DC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AC}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 9 سم

2 $\because$ مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ هو $\overline{DB}$

$\therefore DB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{AB}$ على $\overleftrightarrow{BC}$ يساوى 5 سم

9 1 مسقط $\overline{XZ}$ على $\overleftrightarrow{YZ}$ هو $\overline{FZ}$

فى المثلث XYZ

$\because XZ = XY \;,\; \overline{XF} \perp \overline{YZ}$

$\therefore F$ منتصف $\overline{YZ}$

$\therefore FZ = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{XZ}$ على $\overleftrightarrow{YZ}$ يساوى 3 سم

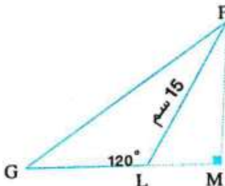
2 $XF = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

مساحة المثلث XYZ = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها = 12 سم^2

(لأن: $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$)

تفكير إبداعى TIMSS

10 العمل: نرسم عمود من النقطة F على $\overleftrightarrow{GL}$ يقطعه فى النقطة M



$m(\angle FLM) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$m(\angle MFL) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$

مسقط $\overline{FL}$ على $\overleftrightarrow{LG}$ هو $\overline{ML}$

فى ΔLMF

$\because m(\angle M) = 90^\circ \;,\; m(\angle LFM) = 30^\circ$

$\therefore LM = \frac{1}{2} FL = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5$

$\therefore$ طول مسقط $\overline{FL}$ على $\overleftrightarrow{GL}$ يساوى 7.5 سم

11 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

اختبر نفسك حتى الدرس 3

الجزء (1)

راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

س سؤال الدرس 3

الجزء (2)

1 ▶ $(XY)^2 = YL \times YZ$

2 ▶ $(XZ)^2 = ZL \times YZ$

3 ▶ $(XL)^2 = ZL \times LY$

4 ▶ $XL = \frac{XZ \times XY}{ZY}$

2 في المثلث ABC

$\because m(\angle A) = 90^\circ ,\ \overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\because (AC)^2 = DC \times CB = 2 \times 10 = 20$

$\therefore AC = 2\sqrt{5}$

◀ $AC = 2\sqrt{5}$ سم

$\because (AB)^2 = BD \times BC = 8 \times 10 = 80$

$\therefore AB = 4\sqrt{5}$

◀ $AB = 4\sqrt{5}$ سم

▶ $\because (AD)^2 = DC \times DB = 2 \times 8 = 16$

$\therefore AD = 4$

◀ $AD = 4$ سم

3 في المثلث ABF

$\because m(\angle B) = 90^\circ ,\ \overline{BE} \perp \overline{AF}$

$\therefore (BE)^2 = EA \times EF = 8 \times 2 = 16$

$\therefore BE = \sqrt{16} = 4$

في المثلث BAD

$\because m(\angle A) = 90^\circ ,\ \overline{AE} \perp \overline{BD}$

$\therefore (AE)^2 = EB \times ED$

$\therefore 8^2 = 4 \times ED$

$\therefore ED = \frac{8^2}{4} = 16$

$\therefore BD = BE + ED = 4 + 16 = 20$

$\therefore$ طول $\overline{BD}$ يساوي 20 سم

تدرب الدرس 3

الجزء (2)

نظرية إقليدس ونتائجها:

1 ▶ $(AB)^2 = BD \times BC$

2 ▶ $(AC)^2 = CD \times BC$

3 ▶ $(AD)^2 = CD \times BD$

4 ▶ $AD = \frac{AC \times AB}{CB}$

2 1 4 سم 2 1.8 سم

3 2.4 سم 4 3.84 سم^2

3 1 $\because (BC)^2 = CD \times CA$

$\because (BC)^2 = x \times 18$

$\therefore (12)^2 = 18x$

$\therefore x = \frac{(12)^2}{18} = 8$

2 $\because (LM)^2 = MJ \times MK$

$\therefore (x)^2 = 4 \times 9 = 36$

$\therefore x = 6$

3 $\because (HG)^2 = EH \times HF$

$\therefore (10)^2 = 5 \times x$

$\therefore \frac{(10)^2}{5} = x \Rightarrow x = 20$

4 $\because (UV)^2 = VW \times VT$

$\therefore (10)^2 = 8 \times VT$

$\therefore VT = \frac{(10)^2}{8} = 12.5$

$\therefore TW = 12.5 - 8 = 4.5$

$\because (x)^2 = WT \times VT = 4.5 \times 12.5$

$\therefore x = \sqrt{56.25} = 7.5$

5 $\because (ZY)^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100$

$\therefore ZY = 10$

$\therefore x = \frac{8 \times 6}{10} = 4.8$

6 $\because (QR)^2 = x \times (48 + x)$

$\therefore (45)^2 = 48x + x^2$

$\therefore x^2 + 48x - 2{,}025 = 0$

$\therefore (x - 27)(x + 75) = 0$

$\therefore x = 27 \quad , \quad x = -75$ (مرفوض)

4 راجع إجابتك في (% 100 إجابات)

5 في المثلث ABC

$\because (CB)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\therefore CB = 10$

◀ طول $\overline{CB}$ = 10 سم

$\because (AB)^2 = BD \times CB$

$\therefore (8)^2 = BD \times 10$

$\therefore BD = \frac{8^2}{10} = 6.4$

◀ $BD = 6.4$ سم

▶ $CD = BC - BD = 10 - 6.4 = 3.6$

◀ $CD = 3.6$ سم

$\therefore AD = \frac{8 \times 6}{10} = 4.8$

◀ $AD = 4.8$ سم

6 راجع إجابتك في (% 100 إجابات)

7 ∵ ABCD مستطيل

$\therefore m(\angle B)=90^\circ$

◄ فى المثلث ABC

$\because (AC)^2=(AB)^2+(BC)^2=(6)^2+(8)^2=100$

$\therefore AC=\sqrt{100}=10$

◄ AC = 10 سم

$\because EB=\frac{AB\times CB}{AC}=\frac{6\times 8}{10}=4.8$

◄ EB = 4.8 سم

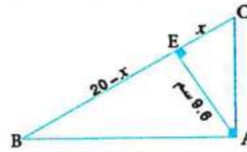
◄ فى المثلث CEB

$\because (EC)^2=(BC)^2-(EB)^2=(8)^2-(4.8)^2$

$\therefore EC=\sqrt{40.96}=6.4$

◄ EC = 6.4 سم

8



فى المثلث ABC القائم الزاوية فى A ، $\overline{AE}\perp\overline{BC}$

$\therefore (AE)^2=EC\times BE$

نفرض أن $EC=x$ ، $BE=20-x$

$\therefore (9.6)^2=x(20-x)$

$\therefore 92.16=20x-x^2$

$\therefore x^2-20x+92.16=0$

$\therefore (5x-36)(5x-64)=0$

$\therefore x=7.2$ أو $x=12.8$

∴ EC ، BE أحدهما يساوى 7.2 سم والآخر يساوى 12.8 سم

$\because (AC)^2=EC\times BC=7.2\times 20=144$

$\therefore AC=12$

$\because (AB)^2=(20)^2-(12)^2=256$

$\therefore AB=16$

∴ طول $\overline{AC}$ = 12 سم ، طول $\overline{AB}$ = 16 سم

من 9 إلى 11 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

12 حل ابراهيم هو الصحيح لأن مساحة المربع المنشأ على أحد ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية تساوى مساحة المستطيل الذى بعداه مسقط هذا الضلع على الوتر وطول الوتر.

13 ، 14 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

اختبر نفسك حتى الدرس 3

الجزء (2)

1 1 {D} 2 $\frac{3}{2}$ 3 ±6 4 <

2 1 (أ) BD (ب) BC (جـ) 9
2 38

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الرابع

س سؤال الحرس 4

1 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 1

$\because C=2\pi r$

$\therefore C=2\times\pi\times 9\approx 56.5$

∴ محيط الدائرة ≈ 56.5 سم

2

$\because C=\pi d$

$\therefore C=\pi\times 215\approx 675.4$

∴ محيط الدائرة ≈ 675.4 سم

3

$\because C=2\pi r$

$\therefore 7\pi=2\pi r \Rightarrow \therefore r=3.5$

∴ طول نصف قطر الدائرة = 3.5 سم

4 1

$\because r=\frac{10}{2}=5$

$\because A=\pi r^2 \Rightarrow \therefore A\approx 3.14\times(5)^2$

∴ مساحة الدائرة ≈ 78.5 سم²

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تدرب الدرس 4

الدائرة:

1 1 الدائرة 2 نصف قطر الدائرة 3 قطر الدائرة

4 12سم

5 (أ) قطر الدائرة

(ب) مركز الدائرة

(جـ) نصف قطر الدائرة

(د) MC = MB = MA

(هـ) AB

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

محيط الدائرة:

3

$\because C=\pi d$

$\therefore C=\pi\times 12=12\pi\approx 37.7$

∴ محيط الدائرة ≈ 37.7 سم لأقرب جزء من عشرة

4

$\because C=2\pi r$

$\therefore C=2\pi\times 3.5=7\pi$

∴ محيط الدائرة = 7 π قدم

5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

6

$\because C=\pi d$

$\therefore C=15.4\pi\approx 48.4$

∴ محيط الدائرة لأقرب جزء من عشرة ≈ 48.4 سم

7 $\because C = \pi d$

$\therefore 88 \approx \frac{22}{7} \times d$ $\therefore d \approx 88 \div \frac{22}{7}$

∴ طول قطر الدائرة ≈ 28 سم

8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

9 محيط عجلة الدراجة هو طول الدورة الكاملة وهو المسافة التى ستقطعها الدراجة فى هذه الدورة

$\because C = 2\pi r$

$\therefore C \approx 2 \times \frac{22}{7} \times 42$

∴ طول الدورة الكاملة ≈ 264 سم ≈ 2.64 متر

∴ عدد الدورات الكاملة = 50 دورة

(لأن: $132 \div 2.64 = 50$ ◄)

10 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

11 $\because C = \pi d$

$\therefore 75.36 \approx 3.14 \times d$ $\therefore d \approx 24$

∴ طول قطر المربع = طول قطر الدائرة ≈ 24 سم

$\therefore A = \frac{1}{2} d^2 \Rightarrow \therefore A \approx \frac{1}{2}(24)^2$

∴ مساحة المربع ≈ 288 سم²

12 1 محيط الشكل المظلل = $d + \pi r$

$\approx 28 + \frac{22}{7} \times 14$

∴ محيط الشكل المظلل ≈ 72 سم

2 محيط الشكل المظلل = $2r + \frac{\pi r}{2}$

$\approx 2 \times 7 + \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{1}{2}$

∴ محيط الشكل المظلل ≈ 25 سم

3 ، 4 ، 5 ، 6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

مساحة الدائرة

13 $\because A = \pi r^2$

$\therefore A = \pi (6.3)^2 \approx 124.7$

∴ مساحة الدائرة ≈ 124.7 سم² لأقرب جزء من عشرة

14 $\because A = \pi r^2$

$\therefore A = \pi (4)^2 = 16\pi$

∴ مساحة الدائرة = 16π بوصة مربعة

15 $\because A = \pi r^2$

$\therefore 36\pi = \pi r^2 \Rightarrow \therefore r = 6$

∴ طول نصف قطر الدائرة = 6 م

$\because C = 2\pi r$

$\therefore C = 2\pi \times 6 = 12\pi$

∴ محيط الدائرة = 12π م

16 $\because C = 2\pi r$

$\therefore 18.84 \approx 2 \times 3.14 \times r$

$\therefore r \approx 3$

∴ طول نصف قطر الدائرة ≈ 3 سم

$\because A = \pi r^2$

$\therefore A \approx 3.14 (3)^2$

∴ مساحة الدائرة ≈ 28.26 سم²

17 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

18 1 π 2 $3 : 2$ 3 36π سم²

4 2.5π 5 12π سم   6 12 بوصة

19 20 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تفكير إبداعى TIMSS

21 أبعاد المستطيل هى 40 سم ، 10 سم

مساحة الجزء المظلل = مساحة المستطيل − مساحة دائرة واحدة ≈ 86 سم²

(لأن: $(40 \times 10) - (3.14 \times 10^2) = 86$ ◄)

اختبر نفسك حتى الدرس 4

1 1 10 سم   2 7π سم   3 64π بوصة مربعة

4 $\{2, 5, 3\}$ 5 $4 : 9$

2 1 25 سم   2 متساوية فى الطول   3 9

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس الخامس

س سؤال الدرس 5

الجزء (1)

1 نصف القطر (r) = 3 سم ، الارتفاع (h) = 10 سم

$\therefore V = \pi r^2 h = \pi (3)^2 (10) = 90\pi$

∴ حجم الإسطوانة = 90π سم³

$\therefore L.A = 2\pi r h = 2\pi (3)(10) = 60\pi$

∴ المساحة الجانبية للإسطوانة = 60π سم²

$\therefore S.A = 2\pi r (h + r) = 2\pi (3)(10 + 3) = 78\pi$

∴ المساحة السطحية للإسطوانة = 78π سم²

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

3 $\because V = \pi r^2 h$

$\therefore 216\pi = \pi r^2 (r)$

$\therefore r^3 = 216$ $\therefore r = \sqrt[3]{216} = 6$

∴ ارتفاع الإسطوانة = طول نصف قطر قاعدتها = 6سم

$\because S.A = 2\pi r (h + r)$

$\therefore S.A = 2 \times \pi \times 6 \times (6 + 6) = 144\pi \approx 144 \times 3.14$

∴ المساحة الكلية للإسطوانة ≈ 452.16 سم²

تدرب الدرس 5

الجزء (1)

الأسطوانة الدائرية القائمة:

1 1 $V = \pi r^2 h = \pi(2)^2(3) = 12\pi$

∴ الحجم = π 12 سم³

$S.A = 2\pi r(h+r) = 2\pi(2)(3+2) = 20\pi$

∴ المساحة الكلية = π 20 سم²

2 $V = \pi(4)^2(6) = 96\pi$

∴ الحجم = π 96 بوصة مكعبة

$S.A = 2\pi(4)(6+4) = 80\pi$

∴ المساحة الكلية = π 80 بوصة مربعة

3 $V = \pi(4)^2(10) = 160\pi$

∴ الحجم = π 160 قدم مكعب

$S.A = 2\pi(4)(10+4) = 112\pi$

∴ المساحة الكلية = π 112 قدم مربعة

4 $V = \pi(0.35)^2(1.3) = \frac{637}{4,000}\pi$

∴ الحجم = π 0.15925 قدم مكعب

$S.A = 2\pi(0.35)(1.3+0.35) = 1.155\pi$

∴ المساحة الكلية = π 1.155 قدم مربعة

5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

6 $V = \pi(1.5)^2(7) = 15.75\pi$

∴ الحجم = π 15.75 بوصة مكعبة

$S.A = 2\pi(1.5)(7+1.5) = 25.5\pi$

∴ المساحة الكلية = π 25.5 بوصة مربعة

---

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

3 ∵ طول قطر قاعدة الإسطوانة = 10 قدم

∴ طول نصف قطر قاعدة الإسطوانة = $\frac{10}{2}$ = 5 قدم

$V = \pi(5)^2(6) = 150\pi \approx 471.2$

∴ حجم الاسطوانة ≈ 471.2 قدم مكعب

$S.A = 2\pi(5)(6+5) = 110\pi \approx 345.6$

∴ المساحة السطحية ≈ 345.6 قدم مربعة

---

4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

5 $V = \pi r^2 h$

$250\pi = \pi r^2(10)$

$r^2 = 25$ ∴ $r = 5$

$S.A = 2\pi(5)(10+5) = 150\pi$

∴ المساحة السطحية = π 150 سم²

---

6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

7 $S.A = L.A + 2\pi r^2$

$S.A = 376.8 + 2\pi(10)^2 = 376.8 + 200\pi$

$\approx 376.8 + 200 \times 3.14$

∴ المساحة الكلية ≈ 1004.8 سم²

8 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

9 ∵ $h = 12$ ∴ $r = \frac{12}{2} = 6$

∵ $V = \pi r^2 h$ ∴ $V = \pi(6)^2(12) = 432\pi$

∴ حجم الاسطوانة = π 432 سم³

---

10 ، **11** ، **12** راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

13 1 π 375 سم³ 2 π 200 سم² 3 π 54

4 8 سم 5 π 50 سم² 6 r سم



14 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

15 $\frac{C^3}{\pi}$

اختبر نفسك حتى الدرس 5

الجزء (1)

1 1 π 80 سم³ 2 528سم² 3 4 سم

4 > 5 $x \geqslant -5$

---

2 1 5 2 (6,0) 3 ±9

---

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

س سؤال الدرس 5

الجزء (2)

1 1 المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

◄ المساحة الجانبية = 432 سم²

(لأن: 432 = 8 × 2 × (7 + 20))

◄ المساحة الكلية = 712 سم²

(لأن: 712 = (20 × 7) 2 + 432)

◄ الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

الحجم = 1,120 سم³

(لأن: 1,120 = 8 × 7 × 20)

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

2 1 ∵ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

∴ $40h = 84$ ∴ $276 = 40h + 192$

∴ $h = 2.1$

◄ الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

◄ الحجم = 201.6 سم³

(لأن: 201.6 = 2.1 × 8 × 12)

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

3 1 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 حجم السبيكة = 1,080 سم³ (لأن: $1,080 = 20 \times 12 \times 9 \times \frac{1}{2}$)

◄ حجم المكعب = 27 سم³ (لأن: 27 = 3 × 3 × 3)

◄ عدد المكعبات = 40 مكعب (لأن: 40 = 27 ÷ 1,080)

تدرب الدرس 5

الجزء (2)

المنشور القائم:

1 1 الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

◄ الحجم = 30 م^3 (لأن: 30 = 3 × 5 × 2)

2 الحجم = 72 سم^3 (لأن: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 12 = 72$)

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 1 المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = 330 بوصة مربعة ((لأن: 330 = 15 × (10 + 6 + 6))

2 المساحة الجانبية = 126 م^2 ((لأن: 126 = 9 × 2 × (4 + 3))

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

3 1 المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

◄ المساحة الكلية = 88 قدم مربعة ((لأن: $(5+5+6) \times 4 + 2\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\right) = 88$)

2 المساحة الكلية = 90 م^2 ((لأن: 90 = (2 × 20) + (5 × 10))

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

4 1 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 مساحة القاعدة = 94 سم^2 ((لأن: $\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8\right) + (7 \times 10) = 94$)

◄ الحجم = 752 سم^3 (لأن: 752 = 8 × 94)

5 حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

◄ الحجم = 144 سم^3 (لأن: 144 = 4 × 6 × 6)

6 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

7 حجم المنشور = 300 سم^3 (لأن: $\frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times 10 = 300$)

8 ، 9 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

10 حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$\because 192 = 16 \times h$ $\therefore h = 12$

◄ إرتفاع المنشور = 12سم

◄ المساحة السطحية = 224سم^2 ((لأن: 224 = (2 × 4 × 4) + (12 × 4 × 4))

11 ، 12 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

13 حجم السبيكة = 96 سم^3 (لأن: $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times 4 = 96$)

حجم المكعب = 8 سم^3 (لأن: 8 = 2 × 2 × 2)

عدد المكعبات = 12 مكعب (لأن: 12 = 8 ÷ 96)

14 ، 15 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

16 1 800 سم^3 2 60 سم^2 3 65 م^2 4 21 سم^2 5 1,920 سم^3

17 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

18 حجم المنشور = مساحة القاعدة × الإرتفاع

$\therefore 360 = \frac{6+12}{2} \times (x) \times 8$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$

اختبر نفسك حتى الدرس 5

الجزء (2)

1 1 120سم^3 2 72سم^2 3 5 4 660 5 15

2 1 60 2 110 3]-6 , -3[

3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس السادس

س سؤال الدرس 6

1 1 $\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore d = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$

∴ البعد بين النقطتين B و A هو $\sqrt{89}$ وحدة طول.

2 $\because d = \sqrt{(0-4)^2 + (-1-2)^2}$

$d = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

∴ طول $\overline{AB}$ = 5 وحدات طول.

2 1 $\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore \sqrt{(k-0)^2 + (7-3)^2} = 5$

$\therefore \sqrt{k^2 + 16} = 5$ بتربيع الطرفين

$\therefore k^2 + 16 = 25$

$\therefore k^2 = 25 - 16$

$\therefore k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9}$

$\therefore k = \pm 3$

∴ قيم k الممكنة هى 3 ، -3

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

3 1

$\because d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(3-3)^2+(-2-5)^2}=7$

$BC=\sqrt{(-2-3)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{29}$

$AC=\sqrt{(-2-3)^2+(-4-5)^2}=\sqrt{106}\approx 10.3$

$\because AB+BC=7+\sqrt{29}\approx 12.4$

$\therefore AB+BC>AC$

∴ النقط A , B , C هى رؤوس مثلث

$\because (AC)^2=\left(\sqrt{106}\right)^2=106$

$\because (AB)^2+(BC)^2=(7)^2+\left(\sqrt{29}\right)^2=78$

$\therefore (AC)^2>(AB)^2+(BC)^2$

∴ المثلث ABC منفرج الزاوية فى B

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

4

$AB=\sqrt{(5+2)^2+(-3-4)^2}=7\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(7-5)^2+(1+3)^2}=2\sqrt{5}$

$CD=\sqrt{(0-7)^2+(8-1)^2}=7\sqrt{2}$

$AD=\sqrt{(0+2)^2+(8-4)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore AB=CD\ ,\ BC=AD$

∴ النقط A , B , C , D هى رؤوس متوازى أضلاع

---

5 1 ∵ النقطتان A , B تقعان على دائرة واحدة مركزها M

$\therefore MA=MB=r$

$\therefore \sqrt{(5-2)^2+(k+3)^2}=\sqrt{(6-2)^2+(-6+3)^2}$

$\therefore \sqrt{9+(k+3)^2}=5$

$\therefore 9+(k+3)^2=25$

$\therefore (k+3)^2=25-9=16$

$\therefore k+3=4$ أو $k+3=-4$

$\therefore k=4-3=1$ | $k=-4-3=-7$

∴ قيم k الممكنة هى 7- ، 1 ، حيث أن r = 5

∴ محيط الدائرة = 10π وحدة طول

(لأن: $2\pi r=2\pi\times 5=10\pi$)

2 $\because r=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=5$

∴ مساحة الدائرة = 25π وحدة مربعة

(لأن: $\pi r^2=\pi\times 5^2=25\pi$)

6

$BC=\sqrt{(5+5)^2+(3+5)^2}=2\sqrt{41}$

∵ E , D منتصفا $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على الترتيب

∴ $\overline{ED}$ هى قطعة متوسطة فى المثلث ABC

$\therefore ED=\frac{1}{2}BC$

$\therefore ED=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{41}=\sqrt{41}$

∴ طول $\overline{ED}$ هو $\sqrt{41}$ وحدة طول

تدرب الدرس 6

البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى:

1 1 $\because AB=\sqrt{(8-6)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

∴ طول $\overline{AB}$ هو $2\sqrt{5}$ وحدة طول

2 $\because AB=\sqrt{(2-1)^2+(-3-4)^2}=5\sqrt{2}$

∴ طول $\overline{AB}$ هو $5\sqrt{2}$ وحدة طول

3 $\because AB=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}=5$

∴ طول $\overline{AB}$ هو 5 وحدات طول

4 $\because AB=\sqrt{(3+2)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$

∴ طول $\overline{AB}$ هو $5\sqrt{2}$ وحدات طول

5 $\because AB=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$

∴ طول $\overline{AB}$ هو $2\sqrt{5}$ وحدة طول

6 $\because AB=\sqrt{(-7-8)^2+(4+4)^2}=17$

∴ طول $\overline{AB}$ هو 17 وحدة طول

7 $\because AB=\sqrt{(6-15)^2+(0-0)^2}=9$

∴ طول $\overline{AB}$ هو 9 وحدات طول

8 $\because AB=\sqrt{(0-6)^2+(-8-0)^2}=10$

∴ طول $\overline{AB}$ هو 10 وحدات طول

2

$\because d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore AB=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5$

$\therefore BC=\sqrt{(0-4)^2+(3-6)^2}=5$

$\therefore AB=BC$

3

$\because d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore AB=\sqrt{(k-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(k-3)^2+1}$

$\therefore BC=\sqrt{(5-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

$\because AB=BC$

$\therefore \sqrt{(k-3)^2+1}=\sqrt{5}$ بتربيع الطرفين

$\therefore (k-3)^2+1=5$

$\therefore (k-3)^2=5-1$

$\therefore (k-3)^2=4$

$\therefore k-3=\pm\sqrt{4}$

$\therefore k-3=2$ أو $k-3=-2$

$\therefore k=2+3$ | $k=-2+3$

$\therefore k=5$ | $k=1$

∴ قيم k الممكنة هى 1 ، 5

---

4 ، 5 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

6

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(2-6)^2 + (0-0)^2} = 4$

$\therefore BC = \sqrt{(4-2)^2 + (2\sqrt{3} - 0)^2} = 4$

$\therefore AC = \sqrt{(4-6)^2 + (2\sqrt{3} - 0)^2} = 4$

∴ محيط $\Delta ABC = 4 + 4 + 4 = 12$ وحدة طول

---

7 1

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore BC = \sqrt{(-5-1)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{13}$

$\therefore AC = \sqrt{(-5-4)^2 + (-3-3)^2} = 3\sqrt{13}$

$\because AC = AB + BC$

∴ النقط A ، B ، C تقع على استقامة واحدة

2 ، 3 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

8 ، 9 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

10

$\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$r = MA = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = 5$

∴ طول نصف قطر الدائرة (r) = 5 وحدات طول

1 محيط الدائرة = 10π وحدة طول

(لأن: $2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi$)

2 مساحة الدائرة = 25π وحدة مربعة

(لأن: $\pi r^2 = 5^2\pi = 25\pi$)

---

11 إلى 15 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

16 1 5　　2 13　　3 5 وحدات طول

4 5 وحدات طول　　5 4

6 $\{-1, 7\}$　　7 225π وحدة مربعة

8 10　　9 10 وحدات طول

10 5 وحدات طول

---

17 إلى 23 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

اختبر نفسك حتى الدرس 6

راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الدرس السابع

س سؤال الدرس 7

1 1

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-4}{2-5} = -\frac{2}{3}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}$

2

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{-2+2} = \frac{4}{0}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف

---

2 1 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

2 ∵ المستقيم // محور Y

∴ الميل غير معرف

$\therefore 7 - a = 0$　　$\therefore x_2 - x_1 = 0$

$\therefore a = 7$

---

3 1 بفرض أن ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، ميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

$\therefore m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{-3-1} = \frac{1}{4}$

$\therefore m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{-7+3} = \frac{1}{4}$

∵ $m_1 = m_2$ ، B نقطة مشتركة

∴ النقط A, B, C تقع على استقامة واحدة

2 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تدرب الدرس 7

ميل الخط المستقيم:

1 1

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore m = \frac{1-4}{3-5} = \frac{3}{2}$

2

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore m = \frac{-1-3}{3+1} = -1$

3 إلى 9 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

2 1 غير معرف　　2 صفر

3 موجب　　4 سالب

---

3 ، 4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

---

5 1 صفر　　2 غير معرف

3 X　　4 $\frac{2}{3}$

---

6 1

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore 3 = \frac{k-2}{1}$　　$\therefore 3 = \frac{k-2}{6-5}$

$\therefore k - 2 = 3$

$\therefore k = 5$

2

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore 0 = \frac{k+2}{-2-3}$

$\therefore k + 2 = 0$ $\therefore k = -2$

3 إلى 6 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

7

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore 2 = \frac{3+9}{k+2+k}$ $\therefore 2 = \frac{12}{2k+2}$

$\therefore 4k + 4 = 12$ $\therefore 4k = 12 - 4$

$\therefore 4k = 8$ $\therefore k = 2$

---

7 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

8 1 بفرض أن ميل $\overleftrightarrow{AB} = m_1$ ، وميل $\overleftrightarrow{BC} = m_2$

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\therefore m_1 = \frac{2-3}{-3-1} = \frac{1}{4}$

$\therefore m_2 = \frac{1-2}{-7+3} = \frac{1}{4}$

∵ $m_1 = m_2$ ، B نقطة مشتركة

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

2 ، 3 ، 4 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

9 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

10 فى المثلث OAB القائم فى O

∵ مساحة المثلث OAB = 24 وحدة مربعة

وطول $\overline{OA}$ تساوى 6 وحدات طول

∴ $OB = \frac{24 \times 2}{6} = 8$ وحدات طول

∴ إحداثى B هو $(8 , 0)$

$\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore m = \frac{0-6}{8-0} = -\frac{3}{4}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوى $-\frac{3}{4}$

---

11 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

12 1 غير معرف 2 $\frac{4}{7}$ 3 0

4 3 5 $8 - 2b$ 6 $(3 , 4)$

7 $-\frac{5}{3}$

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم:

13 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

14 $\because A(2,2) , B(5,5)$

$\therefore m = \frac{5-2}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$

∴ معدل نمو النبات = 1سم / يوم

---

15 إلى 17 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

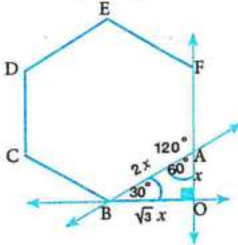
TIMSS تفكير إبداعى

18 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

---

19 فى الشكل ABCDEF

∵ ABCDEF شكل سداسى منتظم



$\because m(\angle FAB) = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$

$\therefore m(\angle OAB) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

فى المثلث OAB

$\because m(\angle AOB) = 90^\circ , m(\angle OAB) = 60^\circ$

$\therefore m(\angle ABO) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$

$\therefore AO = \frac{1}{2} AB$

بفرض أن طول $\overline{AO}$ هو x ، طول $\overline{AB}$ هو $2x$

من نظرية فيثاغورس

$\therefore OB = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\, x$

∵ إحداثى A هو $(0 , x)$ ، إحداثى B هو $(-\sqrt{3}\, x , 0)$

∴ ميل $\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(لأن: $\frac{x-0}{0+\sqrt{3}x} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

تقييم الأضواء - الوحدة الثالثة

1 1 625π سم³ 2 4 : 5 3 2

4 $\frac{1}{2}$ 5 288 6 نقطة

7 $\overline{AC}$ 8 غير معرف 9 10

---

2 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

تقييم الكتاب المدرسى (الوحدة الثالثة)

1 1 $\frac{-11}{3}$ 2 49π سم²

3 $7 < x < 13$ 4 9 سم

---

2 5 الترتيب هو: CD , AD , AC , AB , BC

6 $S.A = 2\pi r (h + r)$

$S.A = 2 \times \pi \times 3 \times (5 + 3) = 48\pi \approx 48 \times 3.14$

∴ المساحة السطحية للأسطوانة ≈ 150.72 سم²

7 $2\sqrt{34}$ 8 صفر

---

3 راجع إجابتك فى (100 % إجابات)

الوحدة الرابعة

الدرس الأول

س سؤال الدرس 1

1 1 مصادرثانوية 2 مصادرأولية

2 راجع إجاباتك فى (% 100 إجابات)

3 ◄ إجمالى عدد الموظفين = 500 + 300 + 200 = 1,000 موظف

◄ عدد مفردات الدرجة الأولى = $\frac{500}{1,000}$ × 100 = 50 موظفًا.

◄ عدد مفردات الدرجة الثانية = $\frac{300}{1,000}$ × 100 = 30 موظفًا.

◄ عدد مفردات الدرجة الثالثة = $\frac{200}{1,000}$ × 100 = 20 موظفًا.

تدرب الدرس 1

جمع البيانات:

1 1 الحصر الشامل ، العينات 2 أولية ، ثانوية

3 الوقت والمجهود والمال 4 الحصر الشامل.

2 1 قاعدة بيانات الموظفين. 2 الاستبيانات.

3 الأولية. 4 معرفة تعداد السكان.

5 الطبقية. 6 20

7 30 8 6

3 1 ثانوية 2 أولية 3 أولية

4 أولية 5 ثانوية

4 1 الحصر الشامل 2 العينات 3 الحصر الشامل

4 العينات 5 العينات 6 العينات

5 ، 6 راجع إجاباتك فى (% 100 إجابات)

7 ◄ العدد الإجمالى للطلاب والطالبات = 200 + 40 = 240 طالبًا

◄ عدد مفردات الطلاب فى العينة = $\frac{200}{240}$ × 12 = 10 طلاب.

◄ عدد مفردات الطالبات فى العينة = $\frac{40}{240}$ × 12 = 2 طالبة.

8 ◄ العدد الإجمالى للعاملين فى المصنع = 180 + 120 + 80 = 380 عاملًا

◄ عدد مفردات العينة من العمال = $\frac{180}{380}$ × 57 = 27 عاملًا.

◄ عدد مفردات العينة من الفنيين = $\frac{120}{380}$ × 57 = 18 فنيًا.

◄ عدد مفردات العينة من المهندسين = $\frac{80}{380}$ × 57 = 12 مهندسًا.

9 ◄ إجمالى عدد الموديلات = 2,300 جهاز.

◄ عدد العينة = $\frac{10}{100}$ × 2,300 = 230 جهازًا.

◄ عدد مفردات الموديل الأول فى العينة = $\frac{600}{2,300}$ × 230 = 60 جهازًا.

◄ عدد مفردات الموديل الثانى فى العينة = $\frac{800}{2,300}$ × 230 = 80 جهازًا.

◄ عدد مفردات الموديل الثالث فى العينة = $\frac{900}{2,300}$ × 230 = 90 جهازًا.

10 حجم العينة = $\frac{5,000}{1,500}$ × 225 = 750 مفردة.

تفكير إبداعي TIMSS

11 حجم العينة = $\frac{40,000}{12,000}$ × 240 = 800 مفردة.

اختبر نفسك حتى الدرس 1

1 1 الاستبيانات 2 العينات

3 الدقة 4 16 5 5 وحدات طول

2 1 العينات 2 18 3 49π

3 1 ◄ إجمالى عدد طلاب المدرسة = 1,200 طالب

◄ عدد الطلاب فى العينة = $\frac{720}{1,200}$ × 40 = 24 طالبًا.

◄ عدد الطالبات فى العينة = $\frac{480}{1,200}$ × 40 = 16 طالبة.

2 نفرض أن العدد هو x

$\because \frac{6-x}{9-x} = \frac{9-x}{15-x}$

$\therefore 81 - 9x - 9x + \cancel{x^2} = 90 - 6x - 15x + \cancel{x^2}$

$\therefore 81 - 18x = 90 - 21x$

$\therefore 21x - 18x = 90 - 81$

$\therefore 3x = 9$ $\therefore x = 3$

∴ العدد هو 3

3 $\blacktriangleright m = \frac{-1-0}{4+3} = \frac{-1}{7}$

الدرس الثاني

س سؤال الدرس 2

1 ◄ احتمال أن يكون الطالب من مفضلى كرة القدم = $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

◄ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون كرة القدم = $\frac{2}{3}$ × 300 = 200 طالب

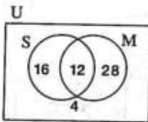
2 1 المبيعات الكلية من نكهة الليمون = 475 عبوة

المبيعات الكلية من نكهة البرتقال = 725 عبوة

∴ نكهة البرتقال هى الأكثر طلبًا، وننصح المصنع بزيادة الإنتاج من نكهة البرتقال.

2 العدد المتوقع إنتاجه من نكهة البرتقال = $\frac{725}{1,200}$ × 6,000 = 3,625 عبوة

3 بفرض أن M هى مجموعة الأشخاص الذين يشجعون فريق الأهلى، و S مجموعة الأشخاص الذين يشجعون نادى برشلونة.



1 $P(A) = \frac{16+12+28}{60} = \frac{14}{15}$

2 $P(B) = \frac{16+28}{60} = \frac{11}{15}$

3 $P(C) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

4 $P(D) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

4 مساحة المستطيل = 24 سم^2 (لأن: $8 \times 3 = 24$ ◄)

مساحة المثلث = 6 سم^2 (لأن: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ ◄)

مساحة الجزء المظلل = 18 سم^2 (لأن: $24 - 6 = 18$ ◄)

1 احتمال أن يصيب الطالب المنطقة المظللة = $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

2 العدد المتوقع لعدد مرات إصابة المنطقة المظللة = $\frac{3}{4}$ × 52 = 39 مرة

5 1 588 جهازًا 2 $\frac{2}{3}$

تدرب الدرس 2

الاحتمال وتوقع الأحداث المستقبلية:

(1) عدد التلاميذ الذين يفضلون كرة القدم = 19 تلميذًا

1 احتمال أن يكون التلميذ المختار يفضل كرة القدم = $\frac{19}{25}$

2 العدد المتوقع للتلاميذ الذين يفضلون ممارسة كرة القدم = 456 تلميذًا

(لأن: $\frac{19}{25} \times 600 = 456$)

(2) 1 $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$

2 270 طالبًا (لأن: $\frac{3}{10} \times 900 = 270$)

3 ∵ احتمال اختيار طالب يفضل كرة القدم = $\frac{9}{20} = \frac{45}{100}$

∴ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون كرة القدم = 405 طالبًا

(لأن: $\frac{9}{20} \times 900 = 405$)

(3) 1 9 مباريات (لأن: $0.3 \times 30 = 9$)

2 ∵ احتمال خسارة الفريق = 0.1 (لأن: $0.1 = (0.3 + 0.6) - 1$)

∴ عدد المباريات المتوقع خسارتها = 3 مباريات

(لأن: $0.1 \times 30 = 3$)

(4) ◄ احتمال التلميذ الذى لا يرتدى نظارة = 0.9 (لأن: $1 - 0.1 = 0.9$)

◄ العدد المتوقع للتلاميذ الذين يرتدون نظارات = 4 تلاميذ

(لأن: $0.1 \times 40 = 4$)

(5) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

(6) عدد السيارات المتوقع تعرضها لحادث = 54 سيارة

(لأن: $0.006 \times 9{,}000 = 54$)

توقع ما تتحمله الشركة من تعويضات = 189,000 جنيهًا

(لأن: $54 \times 3{,}500 = 189{,}000$)

(7) 1 إجمالى مبيعات النوع الأول = 230 قميصًا

إجمالى مبيعات النوع الثانى = 270 قميصًا

وبالتالى فإن النوع الأكثر طلبًا هو النوع الثانى، وننصح المصنع بزيادة إنتاج النوع الثانى.

2 عدد القمصان المتوقع إنتاجه من النوع الأول = 1,840 قميصًا

(لأن: $\frac{230}{500} \times 4{,}000 = 1{,}840$)

(8) أولًا:

	إنتاج المصنع الأول	إنتاج المصنع الثانى	المجموع
معيب	12	18	30
غير معيب	88	92	180
المجموع	100	110	210

ثانيًا: 1 $P(A) = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$

2 $P(B) = \frac{110}{210} = \frac{11}{21}$

3 $P(C) = \frac{18}{210} = \frac{3}{35}$

4 $P(D) = \frac{30 + 92}{210} = \frac{61}{105}$

ثالثًا: العدد المتوقع للتليفزيونات غير المعيبة = 6,000 تليفزيون

(لأن: $\frac{180}{210} \times 7{,}000 = 6{,}000$)

(9)، (10) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

(11) 1 احتمال أن يكون الطالب شاهد فيديو تعليميًا أو ترفيهيًا = $\frac{5}{6}$

(لأن: $\frac{15 + 10 + 25}{60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$)

2 العدد المتوقع للطلبة الذين شاهدوا فيديوهات تعليمية = 1,400 طالب

(لأن: $\frac{35}{60} \times 2{,}400 = 1{,}400$)

(12) 1 20 2 475 3 $\frac{1}{10}$ 4 30 5 90

(13) 1 11 مباراة 2 $\frac{1}{3}$ 3 50 4 120 5 $\frac{13}{25}$

(14) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

(15) مساحة المربع الأكبر = $6^2 = 36$ سم^2

مساحة المربع الأصغر = $2^2 = 4$ سم^2

مساحة الجزء المظلل = 32 سم^2 (لأن: $36 - 4 = 32$)

1 احتمال إصابة المنطقة المظللة = $\frac{8}{9}$ (لأن: $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$)

2 عدد المرات المتوقع لإصابة المنطقة المظللة = 80 مرة

(لأن: $\frac{8}{9} \times 90 = 80$)

تفكير إبداعى TIMSS

(16) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تقييم الأضواء (الوحدة الرابعة)

(1) 1 فحص رمال الصحراء 2 $\frac{3}{7}$ 3 500 بنت 4 490 5 20 6 العينات 7 60 8 8 مباريات 9 $\frac{5}{9}$

(2) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

تقييم الكتاب المدرسى (الوحدة الرابعة)

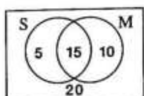
(1) 1 100 2 قاعدة بيانات الموظفين 3 18

4 معرفة عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة النهائية فى امتحان الرياضيات بالفصل.

(2) 1 114 2 $\frac{5}{6}$

3 أسلوب الحصر الشامل ،أسلوب العينات 4 $\frac{2}{5}$

(3) 1 بفرض أن M هى مجموعة الطلاب الذين يفضلون مادة اللغة العربية، و S هى مجموعة الطلاب الذين يفضلون مادة العلوم، و A هو حدث أن يكون الطالب المختار يفضل إحدى المادتين على الاقل، B حدث أن يكون الطالب المختار يفضل مادة العلوم فقط.



$P(A) = \frac{5 + 15 + 10}{50} = \frac{3}{5}$

$P(B) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

◄ العدد المتوقع للطلبة الذين يفضلون مادة العلوم فقط = $\frac{1}{10} \times 750 = 75$ طالبًا

من 2 إلى 4 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

إجابة امتحانات الأضواء الاسترشادية

امتحان 1

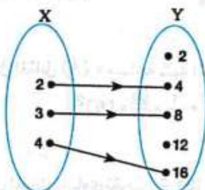
المجموعة الأولى:

1 $3:4$	2 1	3 $\frac{1}{\pi}$
4 -2	5 16	6 640 سم^3
7 16	8 $\{\sqrt{3}\}$	9 3

المجموعة الثانية:

1 (أ) $R = \{(2,4) ، (3,8) ، (4,16)\}$

(ب)



المخطط السهمى

(جـ) نعم R دالة؛ لأن كل عنصر من عناصر X خرج منه سهم واحد فقط.

المجال = $\{2 , 3 , 4\}$، المدى = $\{4 , 8 , 16\}$

2 ∵ $\overrightarrow{AD} \,//\, \overline{CB}$ ، $\overline{AB}$ قاطع لهما.

$\because m(\angle DAB) = m(\angle B) = 42^\circ$ (بالتبادل)

فى المثلث ABC

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = 180°

$\therefore m(\angle BAC) = 180^\circ - (42^\circ + 66^\circ) = 72^\circ$

$\because m(\angle BAC) > m(\angle B)$

$\therefore BC > AC$

3 ∵ $x , y , 18$ فى تناسب.

$\therefore \frac{x+y}{y+18} = \frac{y}{18}$ ◄ $\therefore \frac{x}{y} = \frac{y}{18}$

$\therefore \frac{20}{y+18} = \frac{y}{18}$

$\therefore y^2 + 18y = 360$

$\therefore y^2 + 18y - 360 = 0$

$\therefore (y-12)(y+30) = 0$

$\therefore y - 12 = 0$ أو $y + 30 = 0$

$\therefore y = 12$ | $y = -30$

$\therefore x = 20 - 12$ | $x = 20 + 30$

$\therefore x = 8$ | $\therefore x = 50$

4 $\because f(x) = 3x + b$

∵ النقطة $(4 , 7)$ تقع على المستقيم الذى يمثل الدالة f

◄ $\therefore 7 = 3(4) + b$ $\therefore b = -5$

$\therefore f(x) = 3x - 5$

$\therefore f(1) = 3(1) - 5 = -2$

5 (أ) ∵ $\triangle FEG$ قائم الزاوية فى E.

$\overline{EH} \perp \overline{FG}$

∴ مسقط $\overline{EG}$ على $\overleftrightarrow{FG}$ هو $\overline{HG}$

$\therefore (EG)^2 = GH \times GF$

$(16)^2 = GH \times 20$ $\therefore GH = 12.8$

∴ طول مسقط $\overline{EG}$ على $\overleftrightarrow{FG}$ يساوى 12.8 سم

(ب) $\therefore FG = 20$

$\therefore HF = 20 - 12.8 = 7.2$

∴ طول $\overline{HF} = 7.2$ سم

$\therefore HE = \frac{16 \times 12}{20} = 9.6$

∴ طول $\overline{HE} = 9.6$ سم.

6 $\therefore AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$

$\therefore BC = \sqrt{(2+1)^2 + (2-2)^2} = 3$

$\therefore CD = \sqrt{(-1+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$

$\therefore AD = \sqrt{(1+2)^2 + (-2+2)^2} = 3$

$\therefore AB = CD ، BC = AD$

∴ كل ضلعين متقابلين متساويين فى الطول

∴ النقط A , B , C , D هى رؤوس متوازى الأضلاع ABCD

7 (أ) ◄ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

(ب) ◄ $\frac{4}{15} \times 750 = 200$

∴ العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط السباحة فى المدرسة = 200 طالب.

(جـ) ◄ $\frac{3}{30} \times 750 = 75$

العدد المتوقع للطلاب الذين يفضلون نشاط الكرة الطائرة فى المدرسة = 75 طالبًا.

امتحان 2

المجموعة الأولى:

1 10	2 -4	3 144π
4 25 سم^2	5 -2	6 قاعدة بيانات الموظفين
7 $\overline{DC}$	8 5	9 24

المجموعة الثانية:

1 ∵ b وسط متناسب بين a , c

◄ $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = m$ (حيث m ثابت التناسب)

$\therefore a = m^2c \quad , \quad b = mc$

$\therefore \frac{3a + 4b}{3b + 4c} = \frac{3m^2c + 4mc}{3mc + 4c}$

$\frac{mc(3m+4)}{c(3m+4)} = m = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{3a + 4b}{3b + 4c} = \frac{a}{b}$

2 $5x + 17 < 4x + 20 < 9x + 25$

$5x + 17 < 4x + 20$	$9x + 25 > 4x + 20$
$x < 3$	$5x > -5$
	$x > -1$

$-1 < x < 3$

∴ م.ح $=]-1\ ,\ 3[$

3 $\therefore AC = \sqrt{(20)^2 + (15)^2} = 25$

$Z = \frac{AB \times BC}{AC}$

$\frac{15 \times 20}{25} = 12$

$\therefore x = \sqrt{(15)^2 - (12)^2} = 9$

$y = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16$

4 $RB = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5$ وحدة طول

$CD = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+2)^2} = 5$ وحدة طول

$BC = \sqrt{(3-5)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$ وحدة طول

$AD = \sqrt{(1+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$ وحدة طول

∵ كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول

∴ الشكل ABCD متوازى الأضلاع

5

$2x + 1 < 15 + 8$	$2x + 1 > 15 - 8$
$2x + 1 < 23$	$2x + 1 > 7$
$2x < 22$	$2x > 6$
$x < 11$	$x > 3$

$3 < x < 11$

$x \in]3\ ,\ 11[$

6 ، 7 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

الامتحانات من (3) إلى (9) راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)

إجابة امتحان الكتاب المدرسى

المجموعة الأولى:

1 2	2 $]-\infty\ ,\ -4[$	3 24
4 28	5 128π سم^3	6 $-\frac{1}{6}$
7 5 وحدات طول	8 12π سم	9 120 سم^2

المجموعة الثانية:

1 ∵ b وسط متناسب بين a , c

$\therefore b = ck\ ,\ a = ck^2$ $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore \frac{a-b}{b-c} = \frac{ck^2 - ck}{ck - c} = \frac{ck(k-1)}{c(k-1)} = k \Rightarrow ①$

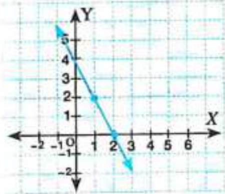
$\frac{a+3b}{3c+b} = \frac{ck^2 + 3ck}{3c + ck} = \frac{ck(k+3)}{c(3+k)} = k \Rightarrow ②$

من ①، ②

$\therefore \frac{a-b}{b-c} = \frac{a+3b}{3c+b} = k$

2 $f(x) = 4 - 2x$

x	0	1	2
$f(x)$	4	2	0



3 مساحة الشكل المقابل (A) = مساحة شبه المنحرف + $\frac{1}{2}$ مساحة الدائرة

$\therefore A = \frac{1}{2}(12 + 18) \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (6)^2$

$A = \frac{921}{7} = 131\frac{4}{7}$

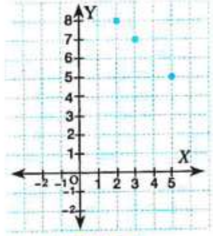
مساحة الشكل المقابل تساوى تقريبًا $131\frac{4}{7}$ سم^2

4 حجم المنشور القائم (V) = مساحة القاعدة × الارتفاع

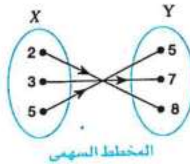
$\therefore V = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times 10 = 150$

حجم المنشور= 150 سم^3

5 $R = \{(2,8), (3,7), (5,5)\}$



المخطط البيانى



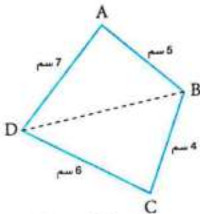
المخطط السهمى

R دالة؛ لأن كل عنصر من عناصر X خرج منه سهم واحد إلى Y .

6 العمل والبرهان

نرسم $\overline{BD}$

فى $\triangle ABD$



$\because AD > AB$

$\therefore m(\angle ABD) > m(\angle ADB) \Rightarrow ①$

فى $\triangle CBD$

$\because DC > BC$

$\therefore m(\angle DBC) > m(\angle BDC) \Rightarrow ②$

بجمع ①، ② نستنتج أن: $m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$

7 راجع إجابتك فى (% 100 إجابات)



رقم الإيداع: 2025/23319

خدمة العملاء: 16766